



TITLE:

開水路流の乱流構造に関する基礎的研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

禰津, 家久

CITATION:

禰津, 家久. 開水路流の乱流構造に関する基礎的研究. 京都大学, 1978, 工学博士

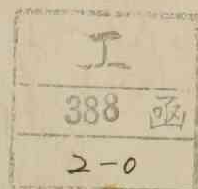
ISSUE DATE:

1978-01-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k1977>

RIGHT:



開水路流の乱流構造に関する基礎的研究

昭和52年7月

禰 津 家 久

開水路流の乱流構造に関する基礎的研究

昭和52年7月

禰 津 家 久

目 次

緒 論	1
第 1 編 不浸透床上の開水路流の乱流構造に関する研究	
第 1 章 概 説	3
第 2 章 開水路流の乱流構造に関する理論的研究	6
第 2・1 節 緒 言	6
第 2・2 節 滑面開水路乱流場の基礎方程式	6
2・2・1 平均流エネルギーの収支関係	6
2・2・2 乱れエネルギーの収支関係	7
第 2・3 節 乱れエネルギーのスペクトル密度関数	9
2・3・1 1 次元スペクトルと 3 次元スペクトルとの関係	9
2・3・2 1 次元スペクトルの分布形	10
2・3・3 乱れエネルギーの輸送に関する一モデル化	12
第 2・4 節 乱れエネルギー収支に立脚した乱流場の領域区分とその乱流特性	13
2・4・1 開水路乱流場の領域区分	13
2・4・2 壁面領域 ($y^+ \lesssim 100$)	14
2・4・3 自由水面領域 ($0.6 \lesssim \xi \lesssim 1.0$)	14
2・4・4 平衡領域 ($100 R_*^{-1} \lesssim \xi \lesssim 0.6$)	15
2・4・5 領域全体での乱流特性	16
第 2・5 節 粗面開水路流の乱流特性	17
2・5・1 粗面乱流に関する基礎的知見	17
2・5・2 粗度の影響に関する若干の予測	18
第 2・6 節 乱れ発生機構及び瞬間 Reynolds 応力の構造	18
2・6・1 乱れ発生機構に関する定性的考察	18
2・6・2 速度変動の確率密度関数	19
2・6・3 瞬間 Reynolds 応力の条件付確率密度関数	21
2・6・4 乱れ発生時の速度変動の挙動	22
第 2・7 節 結 言	23

第3章	乱れ計測器の諸特性に関する研究	25
第3・1節	緒言	25
第3・2節	2成分熱膜流速計の特性	25
3・2・1	熱膜流速計の原理	25
3・2・2	熱膜流速計の方向特性	26
3・2・3	2成分熱膜流速計の検定実験	27
第3・3節	熱膜流速計に及ぼす諸因子の影響	28
3・3・1	ノイズ混入の影響	28
3・3・2	水温変化の影響	28
3・3・3	水流中の不純物の影響	29
3・3・4	流速分布の非一様性の影響	29
3・3・5	その他の影響	29
第3・4節	水素気泡列による乱れの可視化法	30
3・4・1	水素気泡法の原理とその解析方法	30
3・4・2	水素気泡法に及ぼす諸因子の影響とその適用限界	30
第3・5節	結言	31
第4章	不浸透床上の開水路乱流の乱れ構造に関する実験的研究	33
第4・1節	緒言	33
第4・2節	実験装置及びデータ解析方法	33
4・2・1	実験装置及び水理条件	33
4・2・2	実験方法及びデータ解析方法	33
第4・3節	乱れ強度分布の普遍特性	34
4・3・1	平均流速分布及び摩擦速度	34
4・3・2	乱れ強度に及ぼすReynolds数の影響	35
4・3・3	乱れ強度に及ぼすFroude数の影響	36
4・3・4	乱れ強度に及ぼす壁面粗度の影響	37
第4・4節	相対乱れ強度及びReynolds応力	38
4・4・1	相対乱れ強度分布	38
4・4・2	Reynolds応力分布	39
4・4・3	Reynolds応力の相関係数	39
第4・5節	乱流構造に及ぼす自由水面の影響	40
4・5・1	自由水面の変動解析	40
4・5・2	壁面圧力の変動解析	42

第4・6節	スペクトル分布及び特性渦スケール間の関係	44
4・6・1	各成分の波数スペクトル分布	44
4・6・2	無次元化された波数スペクトル分布	45
4・6・3	逸散スペクトル及び局所等方性	47
4・6・4	特性渦スケール間の関係	48
第4・7節	乱れエネルギーの収支関係	50
4・7・1	乱れエネルギーの逸散率	50
4・7・2	乱れエネルギーの発生率及び拡散率	52
4・7・3	乱れエネルギーの収支関係	53
第4・8節	結 言	55
第5章	乱れ発生機構に関する実験的研究	58
第5・1節	緒 言	58
第5・2節	速度変動及び瞬間 Reynolds 応力の確率分布	58
5・2・1	速度変動の確率分布とその高次モーメント	58
5・2・2	瞬間 Reynolds 応力の確率分布	60
5・2・3	瞬間 Reynolds 応力の条件付確率分布	60
第5・3節	Reynolds 応力の内部構造と乱れ発生機構	62
5・3・1	Reynolds 応力の内部構造	62
5・3・2	bursting 現象の各事象間の大小関係	63
5・3・3	壁面領域の乱れ発生機構とその予測	64
5・3・4	乱れ発生機構に及ぼす壁面粗度の影響	64
5・3・5	乱れ発生時の速度変動の挙動	65
第5・4節	bursting 現象の周期性	66
5・4・1	bursting 周期に関する従来の研究	66
5・4・2	bursting 周期の新たな定義	67
5・4・3	bursting 周期とその分布特性	68
第5・5節	乱れ発生機構の二面構造的性	69
5・5・1	内部及び外部パラメータへの依存性	69
5・5・2	二面構造的性に関する今後の研究課題	71
第5・6節	bursting 現象の可視化観測	72
5・6・1	垂直面内の瞬間流速分布形状	72
5・6・2	水平面内の瞬間流速分布形状	73
第5・7節	結 言	74

第 6 章	せん断乱流の物理モデルに関する研究	77
第 6・1 節	緒 言	77
6・1・1	従来乱流モデルの概観	77
6・1・2	乱流モデルの基本構成	78
第 6・2 節	π -型渦モデル (π - eddy model)	79
6・2・1	π -型渦の構成とその定式化	79
6・2・2	π -型渦による乱れ強度及び Reynolds 応力	80
6・2・3	スペクトル密度関数	81
6・2・4	乱れ強度分布	82
第 6・3 節	更新モデル (renewal model)	83
6・3・1	Einstein-Li の乱流モデルとその解釈	83
6・3・2	bursting 現象のモデルとその定式化	84
6・3・3	更新モデルによる乱流特性量の評価	85
6・3・4	更新モデルによる乱れ発生機構の説明	87
第 6・4 節	結合モデル (combined model)	88
6・4・1	粘性底層外縁と境界層外縁との類似性	88
6・4・2	結合モデルによる乱れ強度の評価	89
第 6・5 節	結 言	89

第 2 編 浸透床上的開水路流の乱流構造に関する研究

第 7 章	概 説	91
-------	-----	----

第 8 章	壁面からの定常な流出入がない場合の浸透層上の 乱流構造に関する研究	92
第 8・1 節	緒 言	92
第 8・2 節	主流と浸透流との相互作用に関する理論的予測	92
8・2・1	浸透流の基礎方程式	92
8・2・2	浸透流の乱れ変動解析	94
8・2・3	浸透流乱れによる誘導応力	96
第 8・3 節	誘導応力に関する実験的考察	97
8・3・1	実験装置及び実験方法	97
8・3・2	浸透流の平均流特性	98
8・3・3	主流の平均流特性	98

8・3・4	誘導応力の実験的検証	99
第8・4節	結 言	99
第9章 壁面からの流出入を伴う開水路流の乱流構造に関する研究		
第9・1節	緒 言	101
第9・2節	壁面からの流出入の影響に関する理論的考察	101
9・2・1	透水性滑面上の開水路乱流の基礎方程式	101
9・2・2	壁面からの流出入を伴う壁法則	102
9・2・3	速度欠損則及び粘性底層内の流速分布	103
9・2・4	流出入率 $ v_0^+ $ が大きい場合の流れの挙動	104
9・2・5	流出入による壁面せん断応力の変化	105
9・2・6	乱れ特性に関する理論的考察	107
第9・3節	平均流特性に関する実験的考察	109
9・3・1	実験装置及び実験方法	109
9・3・2	壁面せん断応力	109
9・3・3	平均流速分布特性	110
第9・4節	乱れ特性に関する実験的考察	111
9・4・1	Reynolds 応力分布	111
9・4・2	乱れ強度分布	111
9・4・3	スペクトル分布及び特性渦スケール	113
9・4・4	乱れエネルギーの逸散率	113
第9・5節	結 言	114
結 論		116

付図・付表は別冊構成 (pp. 1 - 63)

緒

論

21世紀に至る今後の四半世紀のうちで、人類の英知を集結して解決すべき自然及び社会科学の最重要課題として、食糧の増産と飢饉の克服、資源エネルギーの開発とその有効利用、生活環境の保全と医療の充実、南北の格差是正、無知の克服と文化・教育の向上等が挙げられるが、この中で私達土木技術者が担わなければならない課題の一つは「水資源の開発とその制御」であろう。すなわち、産業・経済の進展、社会生活の向上・多様化に伴って水をめぐる環境の急激な変化は、近年その質的・量的な劣悪化をもたらすようになり、環境保全を考慮に入れた「水資源の開発と制御」が解決すべき緊急課題であると考えられ、その技術的側面では河川・海洋といった水域での物質拡散や水輸送の動的特性とその制御が高度に検討されなければならない。

一方、自然界の流れの大半は乱流現象で支配されており、流れの抵抗則、拡散現象、物質や熱の輸送問題等の解決に基礎となる乱流構造に関する理論的・実験的研究は、基礎・応用物理学、機械工学、航空工学、化学工学、海洋学、気象学、河川工学等の広範囲な分野で活発に行われ、多くの注目すべき成果があげられてきた。しかし、これらの研究は主に境界層流や管路流での滑面上の空気乱流を対象としたものであり、河川水域での乱流抵抗則、物質拡散、土砂輸送、各種の水理構造物周辺の流れなど実際の水理・水工学の問題の解決に不可欠な開水路せん断流の乱流構造に関する研究は、その乱流現象の複雑さに加えて高精度の乱れ計測技術の確立が立遅れたために、空気乱流で得られた研究成果を活用するにとどまっていた。

ところが近年、熱膜流速計が開発され、乱れ計測技術や解析手法が飛躍的に向上し、また乱流理論を構築する統計流体力学が発展すると共に、開水路流の乱流構造に関する理論的・実験的研究が本格的に行われるようになった。そして、室内水路はもとより大規模な実河川の水域においてもその乱れ特性が計測され、それらを各乱流場の特性速度及び長さスケールで無次元表示すれば普遍的特性を示すという乱れの相似則が良好に成立することが明らかにされた¹⁾。このことは、室内の実験水路で乱流構造を詳細に検討すれば、上述した実際の乱流諸現象の解明とその制御に不可欠な基礎的知見が得られることを十分に示唆している。

このように、開水路乱流の内部構造に関する研究は、第1章にも述べるように、その歴史が浅く、まだ十分な成果は得られていないから、この乱流構造を系統的に詳細に解明し、少なくとも空気乱流に関する知見と比較・検討できる段階まで究明する必要がある。特に、開水路乱流に特有な自由水面や壁面粗度等が乱流構造に及ぼす影響を詳細に検討することは、水理・水工学上の実際問題の解決とも結

びつく不可欠な課題である。すなわち、滑面乱流、粗面乱流さらには浸透流を有するポーラス乱流へと流れの状態を実河川のそれに逐次近づけた場合や、Froude 数を常流域から射流域まで広範囲に変化させた場合の乱れ特性を系統的に検討することが必要であると考えられる。

また、近年の乱流研究によれば、従来不規則と考えられていた乱れ変動の中にも相当規則的な運動(coherent あるいは ordered motion という)の存在が発見され²⁾、せん断乱流の本質である乱れの発生を支配するものは coherent な運動をする bursting 現象であることが明らかにされた³⁾。このため、せん断流の乱れ発生機構すなわち bursting 現象の解明に境界層流や管路流を対象とする基礎的研究が現在精力的に行われているが、Jackson (1976) は実河川で観測される boiling 現象と上述の bursting 現象との深い関連性を指摘し、ripple や dune などの河床波の形成機構や浮遊土砂機構の解明に bursting 現象に関する知見が多大な寄与を果たすことを示唆した⁴⁾。したがって、開水路乱流での bursting 現象を条件付点計測法や可視化法を駆使して理論的及び実験的に考察することは乱れ発生機構の解明という基礎水理学的な興味に単にとどまらず、上述した実河川での乱流抵抗則や土砂輸送等の問題を解決する際に極めて有益な知見を与えるであろう。

さらに、以上の乱れ計測から得られる有用な知見に基づいて、開水路乱流の複雑な現象、特に bursting 現象などを単純化した合理的な物理モデルを考察し、多くの乱流現象への適用を図ることは実用工学上寄与するところが少なくないと考えられる。

一方、現象観察によって明らかとなった乱流特性を利用して、効果的に乱流を制御する方法を開発する研究も重要である。実際、航空工学や化学工学等の分野では壁面からの流体の吸込みや吹出しによる流れの剝離防止法あるいは高温主流からの壁面保護法等に関する基礎的・応用的研究が数多く行われ⁵⁾、この知見を活用して水工学の分野でも水理構造物周辺の流れの制御法が一部検討されている⁶⁾。しかし、これらの大半は平均流に関するものであり、さらに一歩進めて、乱れの制御法を開発する必要がある。すなわち、乱流拡散や浮遊砂の輸送の促進には乱れを積極的に惹起させるべきであり、一方急変流部の剝離防止や河床洗掘防止には乱れの抑制が有効であろう。このように、複雑な乱流現象を好ましい姿に制御しようとする試みは、実際の流れの動的挙動や水量・水質の制御問題へと発展でき、その工学的価値は極めて大きいものと考えられる。

以上論述したように、開水路流の乱流構造を解明することの重要性に鑑みて、本研究は、次の7つの諸課題を設定

して、この乱流構造に関する理論的及び実験的解明を系統的に行おうとするものである。

- (1) 開水路流の乱れ特性量に関する研究
- (2) 開水路流の乱れエネルギー収支に関する研究
- (3) 瞬間 Reynolds 応力の構造に関する研究
- (4) 開水路流の乱れ発生機構に関する研究
- (5) 壁面乱流の物理モデルに関する研究
- (6) 開水路乱流に及ぼす浸透流の影響に関する研究
- (7) 開水路流の乱れ制御に関する基礎的研究

上述の各課題はいずれも相当難解であり、しかも相互に密接な関連をもつから、できるだけ理想化した一貫性のある展開が必要である。本研究ではスペクトル密度関数論及び確率密度関数論を解析上の主軸とし、十分に発達した2次元開水路流の乱流構造を理論的及び実験的に解明する。対象とする流れの境界条件は、①不浸透床面すなわち固体壁面 (solidあるいはrigid bed)と②浸透床(permeable bed)とに大別され、前者の不浸透床上の開水路乱流に関しては第1編で、後者の浸透床上の開水路乱流に関しては第2編でそれぞれ扱う。上述の(1)から(5)までの課題は第1編に、また(6)及び(7)の課題は第2編にそれぞれ属するが、これら一連の研究の関連性や本論文の構成を明示したものがFig. Aである。

まず、第1編は6つの章から成り立つ。Fig. Aには各章で考察する検討事項が示されているが、これらの詳述は第1章の概説で行うことにして、第1編の内容を簡単に記せば次のようである。すなわち、第2章では乱流構造に関する理論予測や解析手法を、第3章では乱れ計測方法をそれぞれ提示し、上述の課題を実験的に解明する道具立てを図る。第4章は課題(1)及び(2)を扱い「長時間平均から見た乱流構造」を詳細に検討する。第5章は課題(3)及び(4)を扱い、条件付点計測法や可視化法を駆使して「短時間平均から見た乱流構造」すなわちbursting現象の解明を図る。最後の第6章では、以上の理論的・実験的研究から得られた知見に基づいて乱流の物理モデルを考察し、乱れの特性を合理的に説明する。

次に、第2編は3つの章から構成される。第7章では浸透床上の乱流構造に関して概説が行われる。第8章は課題

(6)を扱い、粗面乱流より河床がルーズとなったポーラス乱流で生じる主流と浸透流との相互作用を検討する。第9章は課題(7)を扱い、壁面から吸込みや吹出しを与えて乱流場がいかなる変化を示すかを検討し、乱れ制御法の開発に見通しを立てる。

以上の第1編及び第2編の研究成果を要約して結論とするが、本研究に普遍性や一貫性を与えるために①乱れ特性は平均流特性より他の乱れ特性と強い相関をもつという乱れのself-consistency②各領域の特性スケールでの普遍特性化(universality)という乱流概念に立脚して研究を遂行する²⁾。両概念は乱れの相似性(similarity)と相通じるものであり、この概念に立脚すれば先述したように室内実験で得られる知見を実河川へ十分に適用できるものと考えられる。したがって、本研究で得られる研究成果は単に水理学や関連分野での乱流現象の基礎的解明に寄与するばかりではなく、冒頭に述べた「水資源の開発とその制御」の解決に技術的知見を提示する水工学・応用水理学の発展にも少なからず寄与するものと確信する。

緒論 参考文献

- 1) McQuivey, R. S. Summary of turbulence data from rivers, conveyance channels and laboratory flumes, U. S. Geol. Survey, Prof. Paper 802-B, 1973.
- 2) Davies, P. O. A. L. & Yule, A. J.: Coherent structures in turbulence, J. Fluid Mech., vol.69, pp.513-537, 1975.
- 3) Mollo-Christensen, E.: Physics of turbulent flow, AIAA Jour., vol.9, pp.1217-1228, 1971.
- 4) Jackson, R. G.: Sedimentological and fluid-dynamic implications of the turbulent bursting phenomenon in geophysical flows, J. Fluid Mech., vol.77, pp.531-560, 1976.
- 5) Schlichting, H. Boundary layer theory (6-th ed.), McGraw-Hill, 1968.
- 6) Escande, L. (中山謙二(訳):境界層の吸込みによる流況の変更, 土木学会誌, 第48巻, pp.4-8, 1963.
- 7) Tennekes, H. & Lumley, J. L.: A first course in turbulence, MIT Press, 1972.

第1編 不浸透床上の開水路流の乱流構造に関する研究

第1章 概 説

長い歴史のある「経験水理学」が流体力学に支えられた「近代水理学」へと脱皮したのは意外と遅く、ほぼ戦後からである¹⁾。その典型例は本研究で対象とする開水路流の乱流構造に関する研究であって、今から10余年前に本格的に着手されたにすぎない。一方、基礎物理、機械工学、航空工学等の分野では、空気流を使つての滑面境界層流や管路流を対象としたせん断乱流の物理機構に関する研究が精力的に行われ、現在までに多大な研究成果があげられている。最近、これに関する膨大な知見が整理され、例えば Monin ら (1971)²⁾、Tennekes ら (1972)³⁾、Rotta (1972)⁴⁾、Hinze (1975)⁵⁾、Monin ら (1975)⁶⁾ など著名な研究者による著書が出版されるようになった。

本編は、結論で提示された(1)から(5)までの諸課題を解決するために、不浸透床上の開水路流の乱流構造に関する基礎的研究を理論的及び実験的に行おうとするものであるが、空気乱流に関する上述の確立された知見から得る所が大きく、この乱流研究の歴史を概観することは本研究の目的や立場をより明確化し、さらに今後の研究の展望を得る上からも非常に有益であると考えられることから、以下で簡単に現在までの乱流研究の発展経過を著者なりに要約してみる。

Fig. 1・1 は乱流研究に関する歴史を概観したものである。

まず、前世紀までにフランス学派を中心に応用物理数学の分野でポテンシャル流理論が華麗に展開され、いわゆる「完全流体」の力学がほぼ完成された。しかし、実験流体力学や水理学で観察された実在の流体现象を正確に説明できず、両者の溝は深まるばかりであった¹⁾。この両者の橋渡しとなったのは、今世紀初頭(1904)に始まる Prandtl の境界層理論であり、近代流体力学の誕生と考えてよい。その後、彼を中心とした Göttingen 学派は上述の理論と実験との隙間を埋める優れた研究を精力的に行つた。このため、流体力学の主導的研究はフランス学派からドイツ学派へと移ったが、このことは水理学の分野でも例外ではなかった。

1930年代には、航空機の実用化に伴い、空気力学が流体力学から分派した。あるいは、水流中心の従来の流体力学が気体中心の力学へ変貌したといった方が正しいかも知れない。この状況は現在に至るまで続いており、水理学が流体力学と疎遠となった原因をここに見ることができる。この時期に、熱線流速計が初めて試作され、これまで不可能とされていた気流乱れの計測がまがりなりにも可能となった点は注目に値する。

1930年代中頃には Taylor によって等方性乱流理論が誕生し、彼を中心とする Cambridge 学派は格子乱流を熱線流速計で計測してこの理論予測の妥当性を検証した²⁾。この理論はさらに進展し、流体力学の中で不動の地位を得るが、完全流体力学が実現象を説明できなかったと同様に、多くの実在の流れ、すなわちせん断流の乱流特性を説明するには至らなかった。

1940年代になって Kolmogoroff (1941) は局所等方性乱流理論を発表し、せん断乱流の微細構造を説明した。せん断乱流に関する確固たる理論は現在でさえなく、彼の理論が依然として主要なものであることを考慮すれば大いに注目すべきである。その後、彼に鼓舞されたロシア学派は大気乱流への研究に着手し、局所等方性理論の検証実験をすると共にこの理論をさらに発展させた³⁾。

以上がほぼ戦前(1945)までの乱流研究の歴史である。Kármán に代表される Göttingen 学派、広義ではドイツ学派の幾人かは渡米してアメリカでの乱流研究に尽力し、水理学の分野にも多大に寄与したが¹⁾、やはり欧州での研究が主導権を保持していたと考えられる。

次に、戦後の混乱期に一早く Batchelor や Townsend らの Cambridge 学派が格子乱流の経験をもとに噴流や後流すなわち自由乱れの特性に関する実験的研究を成し遂げたことは特筆に値する。しかし、戦後の世界の主導権が欧州からアメリカに移った点は乱流研究に関しても例外ではなかった。すなわち、1950年代になると NACA (National Advisory Committee for Aeronautics) グループの活動が目立ち、境界層流や管路流の乱流構造が実験的にかなり解明された。戦後の乱流の研究体制の特徴は、組織立った実験が可能となり、国際的な情報交換が活発化し、また研究分野も裾を広げて学際的課題となった点であろう。特に、1956年創刊の流体力学専門誌「Journal of Fluid Mechanics」が果たした寄与は非常に大きく、このジャーナルに掲載された多くの論文が本研究の参考文献として引用される。

1960年代前半は電子工学の発達により熱線流速計や圧力変換器等の計測類に改良が加えられ、高精度の測定が可能となった。著者はこの時期を「点計測の黄金時代」と評したい。この頃発展した電算機を活用し、諸々の統計処理をすれば点計測から原理上すべての乱流特性が解明されるという錯覚に陥つたように思われる。これらの経緯は割愛するが、乱流現象は予想以上に複雑であり、理論展開は勿

論のこと、点計測ですらこの現象の側面をかいま見るに過ぎないことが次第に明らかにされた。この典型例が本研究の第5章で論じる乱れ発生機構である。従来ランダムと考えられていた乱れ変動の中にも比較的規則立った coherent な運動が確認され、瞬間流速プロファイルを把握できる可視化法の重要性が認識されるに至った。

1960年代後半から現在に至る約10年間はこのような点計測法への多大な過信の反省期であり、洗練された可視化法の導入や条件付サンプリング技術の開発が行われ、その結果せん断乱流で最も重要な乱れ発生機構すなわち bursting 現象の説明が定性的になされるに至った⁷⁾。そして、現在の乱流研究の最重要課題として、過去の点計測法では発見できなかった上述の coherent な渦運動の解明が挙げられている⁸⁾。

以上が乱流研究に関する主要な進展であり、いま水理学の分野すなわち開水路乱流の研究に目を転じてみる。

Fig.1・1に示したように戦前の水理学は「経験的」であり、空気乱流の研究に比べてほとんど見るべきものがない。もちろんドイツやアメリカを中心として、平均流速への対数則適用性や粗度係数などの実用研究が成果をあげたが¹⁾ 乱れ特性に主眼を置いた乱流研究は著者の知る限り皆無と思われる。

戦後華々しく発表された空気乱流の実験的成果に刺激されてか、1950年代末にはアメリカ土木学会(ASCE)の水理部門(HY)で開水路乱流が主要な研究課題の一つに挙げられ、また1961年の国際水理学会(IAHR)でも中心課題として多くの論文が発表されるに至った。室内実験用の計測技術に問題はあるが、開水路乱流の研究が着手された点は高く評価される。しかし、先述した空気乱流に関する点計測の黄金時代とは対照的に、水流の乱れ計測には技術上の問題点が多く、その本格的な研究は1960年代後半での熱膜流速計の実用化まで待たなければならなかった。1970年代初頭にはX型熱線に対応するV型熱膜が製作され、多成分同時計測が可能となって、開水路流の乱流構造に関する実験的研究に道を開いたと考えられる。

このように開水路乱流の研究進展は空気乱流に比べて遅れを取り、現在でも確立された十分な成果は少ないが、緒論で指摘したように基礎的及び応用的な水理学・水工学の発展には不可欠な研究課題である。本編では緒論で提示した諸課題を系統的に解決する目的で、次のような一連の研究を行う。

これら一連の研究に着手するに先立って、まず第2章では、乱流構造の物理的意義づけを行い、その理論予測や解析方法を提示する。すなわち、乱れエネルギーの収支関係から乱流構造を理論的に考察すると共に、その空間構造をスペクトル構造との類似性から3領域に区分し、各領域で

の乱れ特性を予測する。スペクトル空間の各小領域に適用される指数乗則を統一した形で分布形を数値解析上から提示し、渦スケール間の関連を明示すると共に、乱れ逸散率の評価法を提案する。また、2変数 Gram-Charlier 型確率分布からキュムラント展開手法を用いて瞬間 Reynolds 応力の構造を予測する方法を確立し、第5章での乱れ発生機構の解明に足掛りを得る。

次に、第4章以下の実験的研究では点計測法として2成分熱膜流速計を、乱れの可視化法として水素気泡トレーサを使用するが、実験に着手する前に、第3章ではこれらの乱れ計測技術及び解析手法を確立するために予備的検討を行う。

さて、各研究課題についての研究の進め方とその展望を述べれば以下のようなものである。まず、第4章で扱う課題(1)及び(2)の研究は滑面境界層流や管路流実験ではほぼ解明されたいわば「古典的な研究」であるが、先述のように開水路乱流では不明点が多く、前者との比較検討の意味から Reynolds 数、Froude 数及び壁面粗度を系統的に変化させた実験を行い、乱流構造に及ぼすこれら水理パラメータの影響を詳細に検討する。乱れの self-consistency に立脚して、乱れ強度、Reynolds 応力、乱れ発生率、拡散率、逸散率、スペクトル分布、特性渦スケール等の乱れ特性値を考察し、乱れエネルギーの収支関係を明らかにして、第2章での理論展開の妥当性を検証すると共に、新たな普遍関数を提案する。以上の研究から、第4章では「長時間平均から見た乱流構造」が相当解明されるものと期待される。

次に、第5章で扱う課題(3)及び(4)は空気乱流に関してさえ「最新の研究」であり、相互の関連を考慮しつつ検討を進める。まず、課題(3)では瞬間 Reynolds 応力を実測し、条件付サンプリング手法を用いて bursting 現象の各事象が果たす寄与分や占有時間等を解析し、第2章の理論予測値と比較検討を行う。課題(4)の研究では理論的予測はもはや不可能であることから、もっぱら実験によって検討を進める。bursting 現象の周期性を瞬間 Reynolds 応力の発生挙動から明らかにすると共に、発生渦の coherent な運動特性を考察し、いかなる因子に依存しているかを検討する。さらに、以上の点計測資料を補完し、またより広い現象理解を得るために、水素気泡法による bursting 現象の可視化観測を行い、低速・高速縞の特性や ejection 及び sweep の挙動を明らかにする。このように、第5章では「短時間平均から見た乱流構造」すなわち coherent な運動特性を明らかにすることを目指す。

最後に、第6章で扱う課題(5)は、以上の研究成果に基づいて適切な乱流モデルを考案し、これらの乱流特性を合理的に説明しようとする斬新な研究である。平衡領域以上には乱れエネルギーの平衡状態に着目して「 ϵ -型渦モデル」、壁面領域には bursting 現象の周期性に着目して「更新モデル」及び両者を接続させるものとして「結合モデル」をそれぞれ提案

し、乱流現象の定量的把握を図る。

第 1 章 参考文献

- 1) Rouse, H. & Ince, S. : History of hydraulics, State Univ. of Iowa, 1957 (高橋, 鈴木 (訳) : 水理学史, 鹿島出版会, 1974) .
- 2) Monin, A. S. & Yaglom, A. M. : Statistical fluid mechanics, MIT Press, vol.1, 1971.
- 3) Tennekes, H. & Lumley, J. L. . A first course in turbulence, MIT Press, 1972.
- 4) Rotta, J. C. . Turbulente Strömungen, Teubner, 1972 (大路通雄 (訳) : 乱流, 岩波書店, 1975) .
- 5) Hinze, J. O. : Turbulence (2-nd edi.), McGraw-Hill, 1975.
- 6) Monin, A. S. & Yaglom, A. M. : Statistical fluid mechanics, MIT Press, vol.2, 1975.
- 7) Mollo-Christensen, E. : Physics of turbulent flow, AIAA Jour., vol.9, pp.1217-1228, 1971.
- 8) 大路通雄 (編) : 乱流と情報, 乱流の情報解析研究会, 1976.

第2章 開水路流の乱流構造に関する理論的研究

第2・1節 緒 言

前章で提示した一連の諸課題に関する考察に先立って、本章では開水路流の乱流構造を理論的に予測し、また乱流解析の道具立てを準備して次章以下の実験的研究に理論的な裏付けや示唆を与えることにする。

本研究で対象とする開水路流は2次元、定常で十分に発達した乱流であり、熱力学の分野にまで立入らない最も単純なせん断流である。したがって、この乱流場は Navier-Stokes の式と連続式とで閉じた系を構成し、両式から幾つかの派生方程式が導かれ、例えば Rotta (1972) などの著書に詳細に整理されている¹⁾。これらの流体力学の成果をもとに、第2・2節で乱れエネルギーの流れを考察し、第2・3節でスペクトル解析手法を確立する。第2・4節ではスペクトル空間との類似性に着目して乱流空間を領域区分し、第4章で遂行される乱れエネルギーの収支関係の解明に足掛りを与える。第2・5節では粗面乱流の特性について若干の考察を行うものである。そして第2・6節で2変数 Gram-Charlier 型確率分布から Reynolds 応力の条件付確率分布を新たに導き、第5章で展開される乱れ発生機構の解明に有力な理論的示唆を与える。

以上のように本章ではスペクトル密度関数論及び確率密度関数論を解析上の主軸として乱流構造に関する理論展開を行おうとするものである。

第2・2節 滑面開水路乱流場の基礎方程式

2・2・1 平均流エネルギーの収支関係

Fig. 2・1 に示すように、主流方向を x 軸、壁面に垂直上方を y 軸及び壁面に平行な横断方向を z 軸にとり、また対応する流速成分をそれぞれ $U+u$ 、 $V+v$ 及び $W+w$ とする（以後、大文字は平均流成分を、小文字は変動成分を表わす）。2次元乱流であるから $|U| \gg |V| \gtrsim |W| \equiv 0$ として次の運動方程式が得られる¹⁾

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial(-\overline{u^2})}{\partial x} + \frac{\partial(-\overline{uv})}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cdots (2.1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial(-\overline{uv})}{\partial x} + \frac{\partial(-\overline{v^2})}{\partial y} \cdots (2.2)$$

ここで、 P は圧力、 F は体積力を表わす。

いま、Fig. 2・1 の十分に発達した不浸透床上の開水路乱流場へ上式を適用すれば、次のように簡単化される。

$$\frac{\partial}{\partial y} (-\overline{uv} + \nu \frac{\partial U}{\partial y}) = -g I_e \cdots (2.3)$$

$$P = \rho g (h - y) \cos \theta - \rho (\overline{v^2} - \overline{v_s^2}) \cdots (2.4)$$

ここで、 h は水深、 $I_e \equiv \sin \theta - \cos \theta \cdot \partial h / \partial x$ はエネルギー勾配である。壁面せん断応力 τ_0 は $\tau_0 / \rho \equiv (-\overline{uv} + \nu \partial U / \partial y)|_{y=0} \equiv U_*^2$ (U_* は摩擦速度) であるから、次の Reynolds 応力分布が式 (2.3) から得られる。

$$\frac{-\overline{uv}}{U_*^2} = (1 - \xi) - \frac{1}{R_*} \frac{dU^+}{d\xi} \cdots (2.5)$$

ここで、 $\xi \equiv y/h$ 、 $U^+ \equiv U/U_*$ 及び $R_* \equiv hU_*/\nu \gg 1$ である。式 (2.3) の両辺に U を乗じて積分すれば、次の平均流エネルギー式が得られる。

$$\int_0^1 \left(\frac{-\overline{uv}}{U_*^2} \right) \frac{dU^+}{d\xi} d\xi + \frac{1}{R_*} \int_0^1 \left(\frac{dU^+}{d\xi} \right)^2 d\xi = \frac{U_m}{U_*} \cdots (2.6)$$

ここで、 U_m は断面平均流速である。平均流エネルギーの直接熱逸散率 E を $E \equiv \nu (\partial U / \partial y)^2$ 、乱れエネルギーの発生率 P を $P \equiv -\overline{uv} \partial U / \partial y$ とそれぞれ定義し、また

$$I_e \equiv (f/h) \cdot (U_m^2 / 2g) \cdots (2.7)$$

なる Darcy-Weisbach 型の摩擦損失係数 f を導入すれば、式 (2.6) は次式に変形される。

$$\int_0^1 (P + E) \frac{h}{U_*^3} d\xi = \sqrt{\frac{2}{f}} \cdots (2.8)$$

式 (2.8) から平均流エネルギーの一部は熱に直接逸散され、残りは乱れエネルギーの発生に費やされることがわかる。Reynolds 数 R_* が十分大きいとき、直接逸散率 E は壁面のごく近傍に限られるから、第2・4節で論じる壁面領域の特性長さスケール ν/U_* で式 (2.6) を無次元表示すれば次式ようになる。

$$\int_0^{R_*} (P + E) \frac{\nu}{U_*^4} dy^+ = \frac{U_m}{U_*} \cdots (2.9)$$

ここで $y^+ \equiv U_* y / \nu$ であり、以後上添字記号は ν/U_* での無次元化を意味する。

さて、Prandtl の混合距離理論、すなわち

$$-\overline{uv} \equiv l^2 (dU/dy)^2 \cdots (2.10)$$

を適用すれば、式(2.5)は

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{2(1 - y^+/R_*)}{1 + \sqrt{1 + 4\ell^{+2}}(1 - y^+/R_*)} \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

となり、 R_* が十分大きいとき次式となる。

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\ell^{+2}}} \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

したがって、混合距離 $\ell^+ \equiv \ell U_*/\nu$ が決定されれば、乱れ発生率 P 及び直接逸散率 E が評価できる。壁面領域の混合距離 ℓ^+ に関しては従来多くの研究結果があるが¹⁾ van Driest (1956) が提案した粘性による減衰因子 (damping factor) Γ が考慮された次式が最も妥当であろう²⁾

$$\ell^+ = \Gamma \cdot \kappa y^+, \quad \Gamma \equiv 1 - \exp(-y^+/A) \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

ここで、 A 及び κ は実験定数である。

y^+ が十分大きいとき式(2.13)は Prandtl 自身の混合距離 $\ell^+ = \kappa y^+$ に収束し、式(2.12)は周知の対数則分布となる。すなわち、

$$U^+ = \kappa^{-1} \ln y^+ + B \quad (\ell^+ \gg 1) \quad \dots\dots (2.14)$$

一方、 y^+ が十分小さければ $\ell^+ \rightarrow 0$ となり、式(2.12)は次の粘性底層内の分布式となる。

$$U^+ = y^+ \quad (\ell^+ \ll 1) \quad \dots\dots\dots (2.15)$$

式(2.14)と(2.15)とを滑らかに接続させるもの、すなわち buffer 層での混合距離が式(2.13)であり、すでに確立されている Nikuradse の値³⁾ $\kappa = 0.4$ 及び $B = 5.5$ に対応する A の値は Rotta (1972) によれば $A = 27$ である¹⁾

このように式(2.13)は半理論式ではあるが、その妥当性は実験的に十分確認されており、以下ではこの式に基づいて議論を進める。

このとき、Reynolds 応力 $-\overline{u'v'}/U_*^2$ 、直接逸散率 $E\nu/U_*^4 \equiv E^+ = (dU^+/dy^+)^2$ 及び乱れ発生率 $P\nu/U_*^4 \equiv P^+ = (-\overline{u'v'}/U_*^2)(dU^+/dy^+)$ は式(2.5)、(2.11)及び(2.13)から容易に計算でき、この結果が Fig. 2.2 に示される。粘性底層端 $\delta_s^+ \equiv 11.6$ ^{*)} で粘性応力と Reynolds 応力とはほぼ等しくなり、 $y^+ < \delta_s^+$ では前者が、 $y^+ > \delta_s^+$ では後者がそれぞれ支配的となる。 $30 < y^+ < 100$ の壁面領域では一定せん断応力層が形成され、また R_* が大きいほどこの層の形成範囲は広くなることが理解できる。

次に、直接逸散率 E^+ は粘性底層内で非常に大きい、 y^+ の増加と共に急激に単調減少して $y^+ > 30$ で零に収束

*) 慣習に従って式(2.14)と(2.15)との交点を粘性底層端と本研究でも定義するが、後で明らかにされる乱流構造の上からは $\delta_s^+ \approx 10$ と考えて十分である。

する。一方、乱れ発生率 P^+ は y^+ の増加に従って増加し、 $y^+ \approx \delta_s^+$ で最大値 $P^+ \approx 0.25$ に達したのち緩慢に減少している。

いま、

$$\phi_E(y^+) \equiv \int_0^{y^+} E^+ dy^+, \quad \phi_P(y^+) \equiv \int_0^{y^+} P^+ dy^+ \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

及び $\phi \equiv U_m/U_*$ 、 $R_e \equiv U_m h/\nu = \phi R_*$ とおき、式(2.16)を数値積分した結果が Fig. 2.3 である。 ϕ_E は R_e に無関係であり、 y^+ が 30 で漸近値 9.24 にほぼ達し、直接熱逸散はほとんど終結してしまうことがわかる。一方、 ϕ_P は y^+ に対して単調に増加し、大きな R_e ほど乱れの発生量も大きくなる。式(2.9)は、

$$\sqrt{2/f} = \phi_E(R_*) + \phi_P(R_*) \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

であるから、Fig. 2.3 の結果から f が計算でき、Fig. 2.4 に R_e の関数として示される。また、図には式(2.14)を積分して得られる次の Prandtl-Karman の式も併示された³⁾

$$\sqrt{2/f} = 5.75 \log \text{Re} \sqrt{f/2} + 3.0 \quad \dots (2.18)$$

両者の一致は極めて良好であり、これまでの理論展開の妥当性を示している。

さて、図に示した $\phi_E(R_*)/\phi_P(R_*)$ の変化特性は $f-R_e$ の関係とよく類似し、興味深い。乱流場全体での乱れの発生総量 $\phi_P(R_*)$ は $R_e \approx 10^4$ で熱への直接逸散総量 $\phi_E(R_*)$ とほぼ等しく、 R_e が大きいほど乱れ変動を経由して熱逸散される平均流エネルギーの変換過程がより支配的になると考えられ、Schubauer (1954) が総括した実験結果とよく一致する⁴⁾

以上の結果から、

$$\left. \begin{aligned} \int_0^h E dy &\approx 9.24 U_*^3 \\ \int_0^h P dy &\approx (\sqrt{2/f} - 9.24) U_*^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.19)$$

であり、流れの外的条件である R_e を与えれば式(2.18)及び(2.19)から乱れの発生総量が一意的に決定される。

2.2.2 乱れエネルギーの収支関係

乱れ変動の基礎方程式はテンソル表示で記せば次のようである¹⁾

$$\begin{aligned} U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \overline{u_k u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_k u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \\ - \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + 2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} + (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \frac{p}{\rho} \right] \end{aligned}$$

$$-\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \Big] = 0 \quad \dots\dots\dots (2\cdot20)$$

上式を Fig. 2・1 の開水路乱流場へ適用すれば次式が得られる。

$$-\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{u^2 v} - \nu \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (2\cdot21)$$

$$\frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v^2 v} + 2 \frac{\overline{p v}}{\rho} - \nu \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (2\cdot22)$$

$$\frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = \varepsilon_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{w^2 v} - \nu \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (2\cdot23)$$

$$\text{ここで } \varepsilon_i \equiv \nu \left\{ \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial z} \right)^2 \right\} > 0 \text{ である。} \quad \dots\dots\dots (2\cdot24)$$

同様に、Reynolds 応力の支配方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} -\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\overline{p}}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \right) &= 2\nu \left[\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\overline{v^2 u} + \frac{\overline{p u}}{\rho} - \nu \frac{\partial \overline{u v}}{\partial y} \right] \quad \dots\dots\dots (2\cdot25) \end{aligned}$$

次に、

$$q^2 \equiv \overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}, \quad \varepsilon \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad \dots\dots\dots (2\cdot26)$$

とおき、式(2・21)～(2・23)の辺々を加えると、次の乱れエネルギー式が得られる。

$$\begin{aligned} -\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} &= \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\overline{q^2 v}}{2} + \frac{\overline{p}}{\rho} \cdot v \right. \\ &\quad \left. - \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{q^2}}{2} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (2\cdot27) \end{aligned}$$

周知のように、 $P \equiv -\overline{uv} \partial U / \partial y$ は乱れエネルギーの発生率、 ε は乱れエネルギーの逸散率、 $\overline{q^2 \cdot v} / 2$ は運動エネルギーの乱れ拡散率 T_r 及び $\overline{p \cdot v} / \rho$ は圧力エネルギーの乱れ拡散率 R をそれぞれ表わしたものであり、*)特性スケ-

ル U_* 及び h で式(2・27)を無次元表示すれば次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{Ph}{U_*^3} &= \frac{\varepsilon h}{U_*^3} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{T_r + R}{U_*^3} \right) \\ &\quad - \frac{1}{R_*} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\overline{q^2}}{2 U_*^2} \right) \quad \dots\dots\dots (2\cdot28) \end{aligned}$$

式(2・19)及び第2・4節の諸関係式より、

$$\begin{aligned} \frac{Ph}{U_*^3} &\sim \frac{\varepsilon h}{U_*^3} \sim \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{T_r + R}{U_*^3} \right) \\ &\sim \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\overline{q^2}}{2 U_*^2} \right) \sim O(1) \quad \dots\dots\dots (2\cdot29) \end{aligned}$$

であるから、 R_* が十分大きければ粘性応力の仕事率である式(2・28)の右辺第3項は無視できる。このとき、

$$P = \varepsilon + \partial(T_r + R) / \partial y \quad \dots\dots\dots (2\cdot30)$$

上式が周知の乱れエネルギー収支関係式であり、⁵⁾ 乱流場で発生した乱れエネルギーはその一部が熱逸散に、残りが周囲への乱れ拡散に費やされて、これらの収支が常に保たれていることが理解できる。 $y=0$ 及び h で $(T_r + R) = 0$ であるから、式(2・19)、(2・30)より次式が得られる。

$$\int_0^h (E + \varepsilon) dy = U_*^2 U_m = (\tau_0 / \rho) \cdot U_m \quad \dots\dots\dots (2\cdot31)$$

すなわち、乱流場全体のエネルギー損失量は直接熱に逸散される量と乱れ変動を經由して熱に逸散される量との和であって、当然本研究では後者の物理機構を対象としている。

逸散率 ε と同様に、拡散率 T_r 及び圧力・速度相関 PV を各成分ごとに区別して次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} T_{r1} &= \frac{\overline{u^2 v}}{2}, \quad T_{r2} = \frac{\overline{v^2 \cdot v}}{2}, \quad T_{r3} = \frac{\overline{w^2 \cdot v}}{2} \\ PV_1 &= \frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}, \quad PV_2 = \frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}, \quad PV_3 = \frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2\cdot32)$$

このとき、式(2・21)～(2・23)は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} P + PV_1 &= \varepsilon_1 + \partial T_{r1} / \partial y \\ PV_2 &= \varepsilon_2 + \partial(T_{r2} + R) / \partial y \\ PV_3 &= \varepsilon_3 + \partial T_{r3} / \partial y \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2\cdot33)$$

同様にして R_* が大きいとき、式(2・25)で示された Reynolds 応力の発生に關与する式は次のようになる。

$$-\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\overline{p}}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} \right)$$

*) $\partial T_r / \partial y$ 、 $\partial R / \partial y$ を乱れ拡散率と定義するのが慣例であるが、後の議論を簡単にするためにここでは採用しない。

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v^2 u} + \frac{\overline{p u}}{\rho} \right) \quad \dots\dots\dots (2.34)$$

さて、 PV の計測は現在でも困難であり、推測の域を出ないが⁶⁾ Bernoulliの式から判断すると、加速流すなわち $\partial u / \partial x > 0$ ならば瞬間圧力 $\tilde{p} \equiv P + p$ は減少して $p < 0$ となる相関が、逆に減速流 $\partial u / \partial x < 0$ ならば $p > 0$ となる相関がそれぞれ強いだろう。すなわち、 $PV_1 < 0$ と考えられ、次式が成立すると予測される。

$$PV_2 + PV_3 = -PV_1 > 0 \quad \dots\dots\dots (2.35)$$

以上の式(2.33)~(2.35)から各成分間の乱れエネルギー収支の挙動を推測でき、Fig. 2・5に示すような乱れの内部構造に関する模式図を描くことができる。図中の実線は同一地点での乱れエネルギーの変換過程すなわち各成分間におけるエネルギーの輸送・再配分を示し、破線は他の地点への拡散関係を示している。この模式図は乱れエネルギーの変遷過程を相当単純化したものではあるが、なおかなり複雑な相互作用系を示しており、この内部機構の全貌を実験的にも解明することは相当困難であろう。

第4章ではこれらの乱れエネルギー収支関係を検討するが、Fig. 2・5の内部機構モデルから実験的検証が比較的容易な次の特性が予測される。

(i) 式(2.33)から判断して乱れ発生率 P は u 変動成分と密接な関係があるから、乱れエネルギーはまずこの成分に与えられ、以後 v 及び w 変動成分へと再配分されるであろう。このため乱れ強度間には $u' > v'$ 、 $u' > w'$ なる関係があらう(ここで $u' \equiv \sqrt{\overline{u'^2}}$ などであり、以後プライム記号は $r.m.s.$ 値を表わす)。 v 変動は壁面及び自由水面の存在によって拘束されるが、 w 変動は比較的自由的な運動が可能であるから(側壁の影響は無視できる)、 $w' > v'$ が推測される。したがって、乱れ強度間には $u' > w' > v'$ なる大小関係が存在するであろう。

(ii) 乱れの内部機構で果たす圧力変動の役割は重要であらう。圧力方程式は次のようである¹⁾

$$\rho^2 \left(\frac{P}{\rho} \right) = -2 \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j - \overline{u_i u_j}) \quad \dots\dots\dots (2.36)$$

上式は Poisson 方程式であるから積分解となり、結局 $\overline{p(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)}$ は微積分方程式となってこれを解くことは不可能である。Rotta (1972) はこれに関して経験的な関係式を提案しているが¹⁾ 以下では直感的な定性的推察にとどめる。圧力は等方性であるから、上述の乱れ強度のような異方性のある諸量に対して異方性を緩和する作用を演じるであろう。このような圧力による等方化の傾向は式(2.35)からも推測され、各成分間のエネルギー再配分に寄与すると考えられる。次節で指摘するように、作用素 $\partial / \partial x_i$ は高

波数部の重み付け作用と同内容であるから、 R より PV の方が高波数成分との相関がより高いであろう。したがって、非一様のため起こる他地点への圧力エネルギーの拡散 R は低波数部で、一方非等方性のために起こる同一地点での運動エネルギーの再配分は高波数部でそれぞれ著しく、また高波数部ほど等方化が進んでいよう。

(iii) 式(2.24)の ε_i は $\partial / \partial x_i$ の2乗を含んでいるから高波数部が重み付けられ、圧力による等方化は相当進んでいると考えられる。したがって、 ε_i に等方化近似が容認できれば、

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 (2\delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{jk}) \quad \dots\dots\dots (2.37)$$

であるから¹⁾ 次式が成立する。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{3} = 5\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad \dots\dots (2.38)$$

すなわち、各成分からの熱逸散率はほとんど等しく、総逸散率 ε の $1/3$ をほぼ賄うといえる。そして ε は式(2.38)の Taylor の式から近似的に評価できる。

第2・3節 乱れエネルギーのスペクトル密度関数

2・3・1 1次元スペクトルと3次元スペクトルとの関係

乱れ変動を「渦の集合体」と見なすか、「波動の集合体」と見なすかは現在でも論争の1つであるが⁷⁾ 現象論的な立場からは両者を混同して使っても矛盾はない。

まず、乱れ変動を「波動の集合体」と考えて波数空間上に展開する、いわゆるスペクトル手法は Taylor らによって導入されて以来、主に等方性乱流場で非常に発展され、乱流理論の骨格となったといつて過言ではない⁸⁾ この理論はせん断乱流場にそのまま適用できないが、せん断乱流の理論展開が極めて困難である現状ではこの理論からの類推や示唆は貴重であつて、本研究でもスペクトル解析手法を導入して開水路流の内部機構を予測することにする。

さて、式(2.20)から Karman-Howarth の式が誘導され、その理論展開には次式で定義される3次元スペクトル関数 $E(k)$ が用いられなければならない⁸⁾

$$\int_0^\infty \overline{q^2} \cdot E(k) dk = \frac{\overline{q^2}}{2} \quad \dots\dots\dots (2.39)$$

しかし、実際に計測可能なスペクトルは以下で定義される1次元波数 k_1 に関する $S(k_1)$ であり、理論予測値と実験値とを比較検討するには $E(k)$ より $S(k_1)$ を使用した方が望ましい。このためには、 $E(k)$ と $S(k_1)$ との関係を知る必要が

あるが、等方性乱流に関してのみ次のように得られているに過ぎない¹⁾すなわち、

$$\int_0^\infty u'^2 \cdot S_u(k_1) dk_1 = u'^2, \quad \int_0^\infty v'^2 \cdot S_v(k_1) dk_1 = v'^2, \\ \int_0^\infty w'^2 \cdot S_w(k_1) dk_1 = w'^2 \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 40)$$

と定義したとき、

$$S_u(k_1) = \int_{k_1}^\infty \frac{E(k)}{k} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) dk \quad \dots (2 \cdot 41) \\ S_v(k_1) = S_w(k_1) = \frac{1}{2} \left(S_u(k_1) - k_1 \frac{\partial S_u(k_1)}{\partial k_1} \right) \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 42)$$

本節では等方性近似が容認される波数領域のみに式(2・41)、(2・42)を適用し、理論的に得られた $E(k)$ から $S(k_1)$ を予測しよう。

次に、乱れ変動を「渦の集合体」と考える現象論的な研究には Weizsacker (1948)⁸⁾ や井上 (1952)⁹⁾ の乱子モデル等があるが、対象とする渦の特性長さスケール l によってやはりスペクトル的な分解が可能であり、 $k \simeq l^{-1}$ とすれば*)「渦の集合体」と「波動の集合体」の両概念を矛盾なく統一して扱えると考えられ、本節では両者の区別をまったく行わないことにする。

2・3・2 一次元スペクトルの分布形

スペクトル分布に関する従来の多くの研究によって等方性乱流ではほぼその全貌が明らかにされているが¹⁾ せん断乱流のスペクトル分布には現在でも不明な点が多く、前者からの類推や示唆に頼る面が大きい。従来の研究は Kolmogoroff (1941) が提案した慣性小領域を中心に進展して来たが、本研究ではスペクトル分布形の全貌を可能な限り解明し、各小領域間の関連や特性渦スケール間の関係等を総合的に考察することを目的として以下では $S_u(k)$ を中心に議論する¹⁰⁾

(a) 発生小領域 (大きな渦スケール)

Fig. 2・5 で明らかにされたように、乱れエネルギーは平均流速と Reynolds 応力との相互作用の結果発生するから、発生小領域の特性渦スケール l は平均流オーダ、すなわち乱流場全体を支配する幾何スケールであり、流れの外的な境界条件に依存すると考えられる。したがって、この小領域は最も歪まされたせん断領域であるから等方性乱流理論は適用できない。いま、特性渦スケール l として x 方向の平均渦径 (積分スケール) L_x を採用し、対応する波数を k_0 とすれば、 $k \sim k_0 \sim L_x^{-1}$ は最も乱れエネルギーを含んだ低波数領域に相当し、Tchen (1953) は Heisenberg

の有効粘性の概念を拡張して $S_u(k) \sim k^{-1}$ なる -1 乗則を導いている¹¹⁾ $k \ll k_0$ では aliasing 効果のために $S_u(k)$ はほぼ一定の $2L_x/\pi$ をとるようになる⁵⁾

(b) 粘性小領域 (小さな渦スケール)

粘性小領域の特性渦スケール l として次式で定義される Taylor のミクロ・スケール λ と Kolmogoroff のミクロ・スケール η とがある⁵⁾

$$\lambda \equiv \sqrt{15 \nu u'^2 / \varepsilon} \equiv \lambda_x \equiv \left(\int_0^\infty k^2 \cdot S_u(k) dk \right)^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 43)$$

$$\eta \equiv (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 44)$$

η は内部パラメータのみから構成されるが、 λ はマクロな特性である u' を含んでいるから理論上は η の方が特性スケールとして優れている。しかし、 λ と η とが対象とする渦の働きは次のように異なっている。すなわち、 λ は逸散スペクトル $D_u(k) \equiv k^2 \cdot S_u(k)$ の面積として求められ、 $D_u(k)$ が最大となる波数 k_m の逆数程度 ($\lambda \sim k_m^{-1}$) であるから、 λ 程度の渦が熱逸散に最も関与している。一方、 $k < 1/2 \eta$ で粘性逸散の大半は起きてしまうから¹²⁾ η 程度の渦までで熱逸散はほぼ終了すると考えられる。したがって、粘性小領域を λ 程度の渦と η 程度の渦とにさらに細分した方が現象論的には望ましく、熱逸散の進行具合から前者を初期粘性小領域、後者を終期粘性小領域と命名する¹⁰⁾

さて、相関関数 $R_u(r)$ を $R_u(r) \equiv u(x) u(x+r) / u'^2$ と定義すれば次の Fourier 変換が成立する¹⁾

$$S_u(k) = (2/\pi) \int_0^\infty R_u(r) \cdot \cos kr dr \quad \dots (2 \cdot 45)$$

λ 程度の渦の相関は $R_u(r) \simeq 1 - \frac{1}{2} (r/\lambda)^2$ と近似的に考えられるから、式(2・45)より次式が得られる。

$$S_u(k) \sim \lambda^{-2} k^{-3} \sim u'^{-2} \cdot (\varepsilon/\nu) k^{-3} \quad \dots (2 \cdot 46)$$

すなわち、初期粘性小領域のスペクトルは -3 乗則に従うと予測され、また井上 (1952) も粘性逸散が卓越した最小渦に現象論的な乱子モデルを適用して -3 乗則を導いている⁹⁾ 一方、終期粘性小領域は η 程度の最小渦に支配され、Heisenberg (1948) が導いた -7 乗則が成立すると考えられる⁸⁾

(c) 慣性小領域 (中間渦スケール)

後述するように、特性渦スケール間には $L_x/\lambda \sim R_L^{1/2}$ 及び $L_x/\eta \sim R_L^{3/4}$ (ここで $R_L \equiv u' L_x / \nu$) の関係が成り立つから、 R_L が十分大きければ発生小領域で受ける外的条件や粘性小領域で受ける粘性作用にはほとんど左右されない中間的な渦が両小領域間に存在すると考えられる。Kolmogoroff (1941) はこの慣性小領域に局所等方性理論を展開し、周知の -5/3 乗則を導いた⁹⁾ すなわち、

$$S_u(k) = C u'^{-2} \cdot \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 47)$$

*) l を波長とすれば $k = 2\pi l^{-1}$ であるが、両者の関係を厳密に定義することは困難である。

ここで、 C はKolmogoroffの普遍定数であり、後述するように約0.5である。

以上の結果をTable 2・1に総括した。このように各特性渦スケールによってスペクトル空間を区分することは現象論的な渦モデルを考察する際に極めて有益となるが(2・3・3や第6・2節参照)、各小領域間の関係を明確にするにはスペクトル分布形の全貌を把握する必要がある。

まず、(a)と(c)の両小領域で成り立つ内挿式としてKarman(1948)が提案した次式が妥当である¹³⁾

$$S_u(k) = (2/\pi) L_x \{1 + (k/k_0)^2\}^{-5/6} \quad (2.48)$$

先述のように発生小領域の特性スケールを

$$k_0 \equiv \alpha L_x^{-1}, \quad (\alpha \sim 1) \quad (2.49)$$

とおき、 $k \gg k_0$ で式(2.48)は(2.47)と一致しなければならないから次式が得られる。

$$\varepsilon = K \cdot u'^3 / L_x \quad (2.50)$$

$$\text{ここで、} K \equiv (2/\pi C)^{3/2} \alpha^{5/2} \quad (2.51)$$

以上の式(2.43)、(2.44)及び(2.50)から各特性スケール間の関係が次のように求められる。

$$\begin{aligned} L_x / \eta &= \alpha^{5/8} (2/\pi C)^{3/8} R_L^{3/4}, \\ L_x / \lambda &= \alpha^{5/4} / \sqrt{15} \cdot (2/\pi C)^{3/4} R_L^{1/2} \end{aligned} \quad (2.52)$$

R_L が十分大きいときは $L_x \gg \lambda > \eta$ となり、乱れエネルギーの大部分は発生及び慣性小領域に占められるから次の近似式が成立する。

$$\begin{aligned} 1 &\doteq \int_0^\infty \frac{2}{\pi} L_x \{1 + (k/k_0)^2\}^{-5/6} dk \\ &= B(1/2, 1/3) L_x k_0 / \pi \\ \therefore \alpha &= \pi / B(1/2, 1/3) = 0.746 \quad (2.53) \end{aligned}$$

ここで $B(m, n)$ はベータ関数である。

次に、(b)と(c)の両小領域に次のHeisenbergの式(Bass・Chandrasekharの厳密解)を適用する¹²⁾

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{2} \cdot E(k) &= \left(\frac{8}{9K_H} \right)^{2/3} \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \left(1 + \right. \\ &\quad \left. \frac{8}{3K_H^2} \frac{\nu^3}{\varepsilon} k^4 \right)^{-4/3} \quad (2.54) \end{aligned}$$

ここで、 K_H はHeisenbergの普遍定数である。

(b)と(c)の両小領域では等方性近似が容認できるから、式(2.41)より $S_u(k)$ が求められるが、その解析解は容易でない。そこでまず、両極端の場合を扱えば次のようになる。

$k \ll \eta^{-1}$ のとき、

$$S_u(k) = \frac{18}{55} \cdot \frac{1}{u'^2} \left(\frac{8\varepsilon}{9K_H} \right)^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.55)$$

$k \gg \eta^{-1}$ のとき、

$$S_u(k) = \frac{2}{63} \cdot \frac{1}{u'^2} \left(\frac{K_H \varepsilon}{2\nu^2} \right)^2 k^{-7} \quad (2.56)$$

式(2.47)と(2.55)を比較すれば、普遍定数間に次の関係が成立する。

$$K_H = (8/9)(55C/18)^{-3/2} \quad (2.57)$$

したがって、(b)と(c)の両小領域には、式(2.54)と同型である式(2.55)と(2.56)の内挿式が近似的に適用できると仮定する。すなわち、

$$\begin{aligned} S_u(k) &= C \left(\frac{\varepsilon}{u'^3} \right)^{2/3} k^{-5/3} \left\{ 1 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{55}{12} C \right)^3 \left(\frac{567}{55} \right)^{3/4} (k\eta)^4 \right\}^{-4/3} \end{aligned} \quad (2.58)$$

以上の結果から、式(2.48)と(2.58)とを結合すれば全領域でのスペクトル分布形が求められ、 L_x で無次元表示すれば次式が得られる。

$$S_u(k) L_x^{-1} = (2/\pi) \{1 + (\hat{k}/\alpha)^2\}^{-5/6} (1 + B\hat{k}^4)^{-4/3} \quad (2.59)$$

ここで、 $B \equiv (55/12)^3 \cdot (567/55)^{3/4} (\pi/2)^{3/2} C^{9/2} \alpha^{-5/2} R_L^{-3}$ 、 $\hat{k} \equiv L_x \cdot k$ である。また、 $S_u(k)$ や $S_w(k)$ に関しては、式(2.42)から次式が得られるが、発生小領域への適用は疑問である。

$$\begin{aligned} S_v(k) L_x^{-1} &= S_w(k) L_x^{-1} = \frac{1}{\pi} \{1 + (\hat{k}/\alpha)^2\}^{-11/6} \\ &\quad \times (1 + B\hat{k}^4)^{-4/3} \cdot \left\{ 1 + \frac{8}{3} (\hat{k}/\alpha)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{19}{3} B\hat{k}^4 + 8B\hat{k}^6/\alpha^2 \right\} \quad (2.60) \end{aligned}$$

したがって、 R_L を与えて式(2.40)の規準化条件を満足するように α を決定すれば、スペクトル分布形は容易に計算でき、以上の妥当性は次式から検討される。

$$\int_0^\infty \hat{k}^2 S_u(k) \cdot L_x^{-1} d\hat{k} = (L_x/\lambda)^2 = \frac{\alpha^{5/2}}{15} \left(\frac{2}{\pi C} \right)^{3/2} R_L \quad (2.61)$$

しかし、上述の計算では式(2.61)の $(L_x/\lambda)^2$ を約35%も過大評価する結果となり、式(2.59)は大雑把な予測にしか適用できないことが判明した。これは初期粘性小領域に対する式(2.58)の内挿近似度が悪いためであり、正確なスペクトル分布形を得るために以下では式(2.41)を次のように数値積分(Gauss積分)する。

(1) 初期値 $\alpha = 0.746$ (式(2.53))で次式を計算する。

$$S_u(k) L_x^{-1} \begin{cases} = \frac{2}{\pi} (1 + (\hat{k}/\alpha)^2)^{-5/6}; \\ \quad (0 \leq \hat{k} < 0.8 L_x \lambda^{-1}) \\ = \frac{55}{9\pi} \alpha^{5/3} \int_{\hat{k}}^{\hat{k}_{\infty}} (1 + B' x^4)^{-4/3} (x^{-8/3} - \hat{k}^2 x^{-14/3}) dx; \\ \quad (0.8 L_x \lambda^{-1} \leq \hat{k}) \end{cases}$$

ここで、 $B' \equiv (567/55)^{-3/4} B$, $\hat{k}_{\infty} \equiv 10 (L_x/\eta)$

$$(2) \int_0^{\hat{k}_{\infty}} S_u(k) L_x^{-1} d\hat{k} \equiv \beta \text{ とおき,} \\ |\beta - 1| \begin{cases} \geq 0.01 \rightarrow (\alpha/\beta) \text{ を新しい } \alpha \text{ の値とし} \\ \text{て更新し, (1) を再計算} \\ < 0.01 \rightarrow (3) \text{ の計算を着手} \end{cases}$$

$$(3) \text{ 誤差 } \varepsilon_s \equiv |\beta - 1|, \quad \varepsilon_d \equiv |(\lambda/L_x)^2 \int_0^{\hat{k}_{\infty}} D_u(\hat{k}) d\hat{k} - 1| \text{ を計算}$$

(4) 式(2.42)から $S_u(k)$ を計算

さて、Fig. 2・6は $C = 0.5$ とおき、上述の方法で得られたスペクトル分布の計算結果である。このときの誤差 ε_s は高々 10^{-3} , ε_d は 10^{-2} となり、Karmanの式とHeisenbergの式とを結合してスペクトル分布形全体を得ようとした上述の手法は少なくとも2次オーダー ($k^2 S(k)$ のこと)までは十分正確であるといえる。Fig. 2・6のスペクトル分布形は先述した各小領域の特性を明瞭に表わしている。 R_L が増大するに従って粘性小領域の高波数移行が進み、 $5/3$ 乗則が成立する慣性小領域が広範囲まで存在するようになることがわかる。 $S_u(k)$ や $S_w(k)$ は $\hat{k} \leq 1$ で $S(k)$ より小さいが、 $\hat{k} \geq 1$ では逆に大きく、 $S_u(k)$ を高波数移行したものにほぼ相当する。

次に、Fig. 2・7は乱れエネルギーに寄与する波数成分を検討する目的で $k \cdot S(k)$ を片対数表示したものである。 $\int_0^{\infty} S(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} k \cdot S(k) d(\ln \hat{k}) = 1$ であるから、 $\ln(\hat{k})$ 軸上の $kS(k)$ の面積は常に1である。通常の乱流 ($R_L > 500$) では R_L が大きく変化しても $k \cdot S_u(k)$ は $\hat{k} \equiv k L_x^{-1} \sim 1$ でほぼ最大値をとっている。図に併示した \hat{k}_{50} は $\int_0^{\hat{k}_{50}} S_u(k) dk \equiv 0.5$ と定義され、 $\hat{k}_{50} = 1$ すなわち $\hat{k} < 1$ の波数部にほぼ半分の乱れエネルギーが占められている。すなわち、発生小領域に最もエネルギーが含まれていることが確認できる。 $\ln(\hat{k})$ 軸に対して $kS_u(k)$ は Gauss 分布に類似した分布形を示すが、 R_L が増加するとエネルギーの高波数移行が起きるため、 $\hat{k} \approx 1$ での最大値は漸減して約0.27に収束する。また、このエネルギーの高波数移行は $\hat{k} \approx 10$ を境として起きていることがわかる。

同様に、逸散スペクトル $D(k)$ が Fig. 2・8に示される。 R_L が増加すると $k \cdot D(k)$ の最大値やその最大位置は共に急激に増大するという挙動がよくわかり、 R_L が大きいほどより高波数部でより大きなエネルギー逸散が起るものと考えられる。

2・3・3 乱れエネルギーの輸送に関する一モデル化

波数スペクトル空間を3つの小領域に区分することは、Fig. 2・5の乱れの内部構造モデルを図中の左に記載したように区分することに相当している。すなわち、発生小領域で平均流から生じた乱れエネルギーは逸散率 ε にほぼ等しく、このエネルギーは次の慣性小領域へと輸送される。この小領域では、Fig. 2・8で明らかのように直接熱へと変換されるエネルギーはごくわずかであるから、どの波数断面でもほぼ同量のエネルギーが ε で流れ、高波数すなわち小さな渦へと輸送・伝達されていると考えられる。このモデルはRichardson以来多くの研究者によって認められている乱れエネルギーのカスケード過程に相当し、先述のKolmogoroff理論の前提条件にもなっている。¹⁾そして、粘性小領域へ到達した乱れエネルギーはより小さな渦へと分散され、粘性作用を顕著に受けて熱逸散される。この逸散総量が慣性小領域から輸送されて来た ε に見合ったときすべての最小渦は消滅すると考えられる。

さて、上述の現象論的な乱れエネルギー変遷過程は「給水」の挙動によく類似し、以後これを乱れの「給水管」モデルと命名して、ここで若干考察してみよう。

Fig. 2・9はこの乱れエネルギーの変換過程に関する「給水管」モデルを示したものである。まず、平均流から規模 L_x の「貯水池」(A)に乱れエネルギーが注がれて、ここが発生小領域に相当する。次に、「貯水池」から「給水管」(B)へと乱れエネルギーは導びかれ、次第に各方面へと給水されて行くが、「給水管」からの漏水はわずかであってどの断面でも総水量 ε が流れており、慣性小領域に良好に対応している。最後に、「給水管」から微細に枝分かれして「各家庭の蛇口」(C)に配られて熱として消費され、すなわち粘性小領域の機能を果たことになる。

当然、最大渦は「貯水池」自体の規模であり、異方性が強いが、「給水管」が細くなって枝分かれすればするほどその固有な性質は失われて等方化に向うだろう。また「貯水池」(A)と「蛇口」(C)との距離すなわち給水管系の規模が大きくなれば (R_L の増加に対応する)、両者の影響を受けない「給水管」がより長い距離にわたって存在するすなわち広範囲の慣性小領域が存在するといった対応関係がこの給水管モデルから直ちにわかる。しかしもちろん、上述したスペクトル空間と実際の給水管系との類似性は外面的なものであり、両者の物理機構はまったく相異していることはいままでもない。

さて、このモデルに基づいて、乱れの内部構造の解明に不可欠な乱れエネルギー逸散率 ε の評価方法を検討する。¹⁰⁾ ε は給水管モデルでの総流量に相当するから、その評価方法として Fig. 2・9から次の3つが考えられる。

(A) 「貯水池」法 式(2.50)の $\varepsilon = K \cdot u'^3 / L_x$ から評価する方法。

(B) 「給水管」法 慣性小領域の存在を確認した後、式(2・47)の $\varepsilon = [u'^2 k^{5/3} S_w(k)/C]^{3/2}$ から評価する方法。

(C) 「蛇口」法 式(2・43)の $\varepsilon = 15 \nu u'^2 \int_0^\infty k^2 S_w(k) dk$ から評価する方法。

まず、(C)の蛇口法はいわば各家庭の蛇口で消費される末端流量を合計して総流量 ε を評価しようとする方法である。主として粘性小領域を対象とするから等方性近似が許されて Taylor の評価式(2・38)が使われる。

次に、(B)の給水管法はいわば給水管の任意断面(k)に流量計を設置してその流量 ε を測ろうとする方法である。すなわち、慣性小領域内の任意点(k)における $S_w(k)$ の値から ε を評価する方法であり、慣性小領域の存在が前提条件である。この方法では Kolmogoroff の普遍定数 C が既知でなければならない。幸い C の実験値は多くの研究者によって得られており、Fig. 2・10 は Bradshaw (1967) が総括した実験結果である。¹⁵⁾ 通常のせん断乱流では $R_L \equiv u' l / \nu > 100$ であるから、 C はほぼ定数で 0.5 としてよく、本研究では一貫してこの値を採用する。

次に、(A)の貯水池法はいわば貯水池からの流出流量を直接測って ε を決定する方法であり、発生小領域が対象となる。貯水池規模 L_x や外的条件の影響を受け易いから、係数 K は R_L の関数であろう。 K は α 及び C の値が既知であれば式(2・51)から決定される。Fig. 2・11 は $C=0.45, 0.50, 0.55$ の3種類に関して、2・3・2のスペクトル計算手法から得られた α を使って求められた K の結果である。 R_L が増加すると K は急激に単調減少し、 $R_L \approx 100$ で $K \approx 1$ に達した後、漸減して $R_L \approx 1000$ でほぼ一定値に収束する。通常のせん断乱流 ($R_L = 10^4 \sim 10^5$) では $R_L \approx R_* \approx R_L/20 = (500 \sim 5000)$ であるから、 K は実用上ほぼ定数と見なしてよいと考えられる。

ところで、開水路乱流の限界 Reynolds 数 $R_{L,c}$ は $R_{L,c} \sim 1000$ 、すなわち $R_L \sim 50$ であろう。Fig. 2・12 は、このように R_L が極端に小さいときのスペクトル分布計算の結果である。 $R_L > 50$ では R_L の減少に従って $k \cdot S_w(k)$ の最大位置は先述のように高波数移行するが、 $R_L \leq 50$ ではこの最大位置は逆に低波数移行するようであり、ある限界 R_L の存在が示唆されて興味深い(もちろん、低 R_L まで上述の計算手法が妥当であるか検討を要する)。一方、Rotta (1972) は等方性乱流のスペクトル方程式を数値積分して、 R_L が 0 から 85 までのスペクトル分布形を求め、Fig. 2・12 とよく類似した結果を得ている。Rotta の数値計算から得られた K の値を Fig. 2・11 に併示したが ($K_H = 0.5$ とした)、著者の結果とかなり良好に一致している。また Rotta は、 R_L が両極端における K の収束値を次のように与えた。

$$K_0 \equiv \lim_{R_L \rightarrow 0} K = \frac{15 \pi}{2 R_L} \dots\dots\dots (2\cdot62)$$

$$K_\infty \equiv \lim_{R_L \rightarrow \infty} K = 2 (3r/2)^{3/2} (55C/18)^{-3/2},$$

$$(r = 0.5) \dots\dots\dots (2\cdot63)$$

Fig. 2・11 に示すように、著者の値は式(2・62)に収束するようである。また、式(2・51)と(2・63)とはほぼ完全に一致し、注目に値する。

以上の給水管モデルから ε を評価する方法として、上述の3種類が提案された。第4章ではこれらの各方法から逸散率 ε を実際に評価し、それぞれの優位性を検討する。

第2・4節 乱れエネルギー収支に立脚した乱流場の領域区分とその乱流特性

2・4・1 開水路乱流場の領域区分¹⁶⁾

前節では主に同一地点における乱れエネルギーの変遷過程 (Fig. 2・5 の実線で示された箇所) に関して考察してきたが、本節では乱流場全体における乱れエネルギーの変遷過程 (Fig. 2・5 の破線で示された箇所) を考察する。

第4章で明らかにされるが、壁面近傍(内部層)では乱れの発生がその逸散より卓越する、すなわち $P > \varepsilon$ であり、一方壁面から十分離れた主流部(外部層)では乱れの発生は非常に小さく、 $\varepsilon > P \approx 0$ が成立している。¹⁷⁾ 換言すれば、内部層は乱れエネルギーの過剰領域、外部層は逆に不足領域にそれぞれ相当するから、両者の間には乱れエネルギーの輸送が存在していると考えられる。このとき、Tennekens ら (1972) は、壁面乱れの空間構造とそのスペクトル構造とは明瞭な類似点が存在すると示唆している。³⁾ この両者の類似性を示したものが Fig. 2・13 である。すなわち乱流空間でのエネルギーの流れは先述の給水管モデルと同様な挙動を示すことが予測される。スペクトル空間で輸送される「流量」は ε であったが、乱流空間では乱れ拡散率 $T \equiv \partial T_r / \partial y$ であり、「給水管」に相当する領域では $P \approx \varepsilon$ なる乱れエネルギーの動的平衡状態が存在していると考えられる。しかし、これらの類似性は定性的なものであり、定量的な構造自体は明らかに相異している。特に、波数 k に対応するものは空間座標の y であるが、両者は逆数関数にあるため特性長さスケールの大小関係はまったく逆である。

さて、給水管モデルに従って開水路乱流場を3つの領域に区分すれば Fig. 2・14 のようになる。すなわち、

(1) 壁面領域 境界層流の「内部層」に相当し、特性長さ及び速度スケールはそれぞれ ν/U_* 及び U_* であって壁法則が成立する。Fig. 2・2 で示したように乱れエネルギーの発生率が大きく、後述する bursting 現象が顕著に起き、壁面乱れとして最も興味ある重要な領域である。

(2) 自由水面領域 境界層流の「外部層」に相当し、特性長さ及び速度スケールはそれぞれ h 及び最大流速 U_{max} で

であって、速度欠損則が成立する。開水路流では自由表面の存在のためこの影響を受け易い領域である。

(3) 平衡領域 (1)と(2)との中間領域であり、乱れエネルギーの収支に $P \approx \varepsilon$ なる動平衡状態が存在していると考えられる領域である。すなわち、この領域は慣性小領域に対応し、外的な境界条件には左右されない相似則が期待できよう。特性長さ及び速度スケールは y 及び $\sqrt{\tau/\rho}$ である。

ところで、各領域の乱れ特性を各々の特性スケールで普遍関数表示しようとしたとき、乱れの基本特性値として何を選ぶかが問題となる。著者は、波数空間との類似性や乱れの構造の相似性から推察して、乱れ逸散率 ε を乱れの基本特性値に選ぶことが最も妥当であろうと考え¹⁰⁾ これに基づいて各領域の乱れ特性や平均流速分布を以下考察する。

2・4・2 壁面領域 ($y^+ \lesssim 100$)

この領域の乱れ特性値は ν/U_* 及び U_* で普遍関数表示できると考えられる。例えば、buffer層以上の逸散率 ε 及び平均渦径 L_x は次のように普遍関数表示できることが実験的に明らかにされた¹⁰⁾

$$\varepsilon\nu/U_*^4 = A_1 \cdot (y^+)^{-1}, \quad (A_1 \text{ は普遍定数}) \quad (2.64)$$

$$L_x^+ \equiv L_x U_* / \nu = A_2 \cdot (y^+)^{1/2}, \quad (A_2 \text{ は普遍定数}) \quad (2.65)$$

$P \sim \varepsilon$ であるから、式(2.64)はFig. 2・2からも推測できる。このとき、式(2.50)から次式が得られる。

$$u'/U_* = A_3 \cdot (y^+)^{-1/6}, \quad A_3 \equiv (A_1 A_2 / K)^{1/3} \quad (2.66)$$

R_L が十分大きいとき、 K すなわち A_3 は普遍定数となるから、 u'/U_* は $-1/6$ 乗則の普遍関数で表現できることになる。

さて、 $y^+ > 30$ の buffer 層以上では式(2.14)なる Prandtl の対数則が適用できるが、現象論的には次のように表現しても妥当であろう。すなわち、

$$\frac{u'}{U_*} = A_4 \cdot y^+ \frac{dU^+}{dy^+} \quad (A_4 \text{ は比例定数}) \quad (2.67)$$

と仮定すれば、式(2.66)から次式が得られる。

$$U^+ = A_5 \{ A_6 - (y^+)^{-1/6} \}, \quad (y^+ > 30) \quad (2.68)$$

式(2.14)と(2.68)とから次の関係が得られる。

$$A_5 \equiv 6A_3 / A_4 = 6\pi^{-1} (y^+)^{1/6} \approx 11.4\pi^{-1} \quad (2.69)$$

A_4 , A_5 , A_6 はほぼ普遍定数と考えられる実験定数であ

り、 $\pi = 0.4$ のとき式(2.69)から $A_5 \approx 28.5$ となる。また、切片定数 A_6 は $B = 5.5$ とおいた式(2.14)と(2.68)との比較から約 1.1 となった¹⁰⁾ Fig. 2・15 は、これらの実験定数を代入して式(2.14)及び(2.68)を図示したものである。式(2.68)は $y^+ > 30$ で Prandtl の式(2.14)と非常に良好な一致を示し、上述の現象論的な普遍関数表示がかなり妥当なものと予測される。なお、Fig. 2・15 には式(2.13)を使って計算された van Driest の平均流速分布や第4章で述べる実験値も併示されたが、これらの結果は $y^+ > 30$ で相互に良好な一致を示している。

2・4・3 自由水面領域 ($0.6 \lesssim \xi \lesssim 1.0$)

この領域は平均流の主要部であり、乱流場全体を特徴づける R_τ や F_τ に依存するものと考えられる。特性速度スケールは U_{max} であるが、 R_τ が与えられれば U_{max} は U_* の関数となるから依然として U_* を速度スケールに選んでよい。

さて、無次元座標として $\xi' \equiv (1 - \xi)$ をとれば、次式の成立することが明らかにされている¹⁰⁾

$$\varepsilon h / U_*^3 = B_1 (\xi' + B_2), \quad (B_1, B_2 \text{ は普遍定数}) \quad (2.70)$$

$$L_x / h = B_3 \quad (\text{一定値}) \quad (2.71)$$

上式と式(2.50)から次式が得られる。

$$\frac{u'}{U_*} = \left(\frac{B_1 B_3}{K} \right)^{1/3} (\xi' + B_2)^{1/6} \quad (2.72)$$

次に、 $l^+ \gg 1$ であるから、式(2.11)は $dU^+/d\xi' = -\sqrt{\xi'}/(l/h)$ となり、混合距離 l の分布形が既知ならば(当然、式(2.13)はもはや適用不可能である)、平均流速分布が計算できる。まず、平均渦径 L_x とこの渦同志の混合距離 l とは正の相関があるから、 L_x/h が一定ならば l/h も一定であるとの仮定が許されれば次式が得られる。

$$U_{max}^+ - U^+ = B_4 \xi'^{1/2}, \quad B_4 \equiv (2/3)(l/h)^{-1} \quad (2.73)$$

式(2.73)は Darcy の実験式そのものであり、彼によれば $0 \leq \xi' < 0.75$ で実験値と良好に一致して、 $B_4 = 5.08$ を与えた³⁾ このとき、式(2.73)から $l/h = 0.131$ となるが、この値は Nikuradse によって得られた実験値とよく一致する。

さて、Fig. 2・13で示すように、この領域の乱れエネルギー収支関係は式(2.30)より $T \equiv \partial T_\tau / \partial y \approx -\varepsilon$ であるから、拡散率 T と混合距離 l との関係が既知であれば、後者を格別仮定しなくても上述の方程式系を閉じさせることができる。ここでは、 T と l とを関係づける現象論的なモデルとして、乱れエネルギーの拡散は隣接する渦間の混合距離が異なるために生じ、その拡散の強さは混合距離の分布勾配に比例するという Zagustin ら(1969)の仮説を採用す

る。¹⁶⁾すなわち、 $T_r \equiv \overline{q^2 v} / 2 \sim U_*^3 \partial l / \partial y$ を仮定すれば、式(2.70)から混合距離に関する次式が得られる。

$$\frac{d^2(l/h)}{d\xi'^2} = -B_5(\xi' + B_2), \quad (B_5 \text{ は比例定数}) \quad (2.74)$$

いま、 $\xi' = 0$ のとき $d(l/h)/d\xi' = 0$ 、 $\xi' = 1$ のとき $l/h = 0$ かつ $d(l/h)/d\xi' = -\kappa$ という境界条件で上式を解くと次式が得られる。

$$l/h = (\kappa/3) \{ (1 - \xi'^3) + B_6(1 - \xi')^2(1 + 2\xi') \} \quad (2.75)$$

ここで、 $B_5 = 2\kappa/(1 + 2B_2)$ 、 $B_6 = B_2/(1 + 2B_2)$ となる。

これまでの著者の研究によれば $B_2 = 0.1$ すなわち $B_6 = 1/12$ であり、一般に $B_6 \ll 1$ と考えられるから、 $\xi' < 0.4$ のとき式(2.75)の第2項を近似計算して次式が得られる。¹⁰⁾

$$U_{max}^+ - U^+ = \frac{2}{\kappa} \left[\tanh^{-1} \xi'^{3/2} - \frac{3}{2} B_6 \left\{ \left(\frac{4\xi' + 5}{\xi' + 1} \right) \sqrt{\xi'} - 5 \tanh^{-1} \sqrt{\xi'} \right\} \right] \approx \frac{2}{\kappa} \left[\tanh^{-1} \xi'^{3/2} + \frac{3}{2} B_6 \frac{\xi'^{3/2}}{\xi' + 1} \right] \quad (2.76)$$

Fig. 2.16 は $\kappa = 0.4$ とおき、 $B_2 = 0.0, 0.1, 0.2$ の場合の式(2.75)を図示した結果である。 $B_2 = 0$ の分布形は、 $\varepsilon \sim u'^2$ と仮定して得られた Zagustin らの結果と一致している。¹⁶⁾ また、図には次の Nikuradse の実験式も併示した。³⁾

$$l/h = 0.14 - 0.08\xi'^2 - 0.06\xi'^4 \quad (2.77)$$

$B_2 \leq 0.2$ では B_2 に対する式(2.75)の変化は小さいが、 $\xi' > 0.3$ では $B_2 = 0$ の分布が式(2.77)とよく一致し、 $\xi' < 0.3$ の自由水面領域ではむしろ $B_2 = 0.1$ の分布の方が高い適合性を示す。この領域における l/h の値はほぼ一定と見なしてもよく、式(2.73)の妥当性が確認される。図には $B_2 = 5.1$ 及び 4.8 に対する l/h を示したが、これらはそれぞれ $B_2 = 0.0$ 及び 0.1 の分布と比較的良好に一致する。

次に、Fig. 2.17 は式(2.75)及び(2.77)で与えられる混合距離を用いて式(2.11)を数値積分して得られた平均流速分布(速度欠損則)を示したものである。 $B_2 = 0.0$ に対する流速分布(式(2.76)の第1項のみであり Zagustin らの分布そのもの)は式(2.77)から得られたものと非常に一致を示し、 $B_2 = 0.1$ 及び 0.2 での流速分布も $B_2 = 0.0$ のものと高々 7 ~ 12% の相違しか認められず、実用上大差はない。Fig. 2.17 には式(2.73)も併示したが、自由水面領域では上述の流速分布形とよく一致し、実用上は十分満足させるものと考えられる。

2.4.4 平衡領域 ($100R_*^{-1} \lesssim \xi < 0.6$)

慣性小領域の場合と同様に、 R_* が比較的小きければ厳密な意味 ($P = \varepsilon$) での平衡領域の存在は期待できないが、 $|P - \varepsilon|/\varepsilon \lesssim 20\%$ ならば乱れは近似的に平衡状態にあると仮定したとき、この領域は $\xi \lesssim 0.6$ となる。この基準条件では壁面領域も平衡状態にあるといえるが、¹⁷⁾ 内部パラメータの影響を受けないという条件(慣性小領域と同様に ν の影響を受けない条件)で、 $y^+ \gtrsim 100$ すなわち $\xi \gtrsim 100R_*^{-1}$ を平衡領域の下限と定義する。この領域は外的な境界条件にあまり左右されないから乱れの構造に相似性が期待でき、第4章で指摘するように乱れの self-consistency が良好に成立するものと考えられる。¹⁷⁾

このとき、乱れ特性値は y 及び $\sqrt{\tau/\rho}$ の特性スケールで普遍関数表示できるから、 $\varepsilon \sim (\tau/\rho)^{3/2}/y$ すなわち、

$$\varepsilon h/U_*^3 = C_1(1 - \xi)^{3/2}\xi^{-1} \quad (C_1 \text{ は普遍定数}) \quad (2.78)$$

となり、また特性速度スケールとして $\sqrt{\tau_0/\rho} \equiv U_*$ を近似的に使えば次式となる。

$$\varepsilon h/U_*^3 = C_2 \xi^{-1} \quad (2.79)$$

この領域での L_x/h は ξ のべき指数が $1/2$ から 0 へと遷移するから、 u'/U_* の普遍関数表示は容易ではない。いま、両極端を考えると、式(2.78)から、

$$\frac{u'}{U_*} \begin{cases} \sim (1 - \xi)^{1/2} \xi^{-1/6} \\ (L_x/h \sim \xi^{1/2} \text{ のとき}) \\ \sim (1 - \xi)^{1/2} \xi^{-1/3} \\ (L_x/h \sim \text{定数のとき}) \end{cases} \quad (2.80)$$

あるいは式(2.79)を用いれば次式となる。

$$\frac{u'}{U_*} \begin{cases} \sim \xi^{-1/6} \\ (L_x/h \sim \xi^{1/2} \text{ のとき}) \\ \sim \xi^{-1/3} \\ (L_x/h \sim \text{定数のとき}) \end{cases} \quad (2.81)$$

これらの普遍関数の妥当性は第4章で検討される。

次に、平衡領域での乱れエネルギー収支関係は

$$\frac{Ph}{U_*^3} \equiv - (1 - \xi) \frac{dU^+}{d\xi} = \frac{\varepsilon h}{U_*^3}$$

であるから、式(2.78)を代入して積分すれば次式を得る。

$$U_N \equiv U_{max}^+ - U^+ = -C_1 [2 \{ \ln(1 - \sqrt{1 - \xi}) + \sqrt{1 - \xi} \} - \ln \xi] \quad (2.82)$$

一方、Karman は特性スケールとして l 及び $\sqrt{\tau/\rho}$ を選び、運動方程式に乱れ構造に関する相似則を適用して次式を導いた。³⁾

$$U_K \equiv U_{max}^+ - U^+ = -\kappa^{-1} \{ \ln(1 - \sqrt{1 - \xi}) + \sqrt{1 - \xi} \} \quad (2.83)$$

また、壁面領域での Prandtl の式 (2・14) をこの平衡領域まで拡張・適用すれば次式となる。

$$U_p \equiv U_{max}^+ - U^+ = -\kappa^{-1} \ln \xi \quad \cdots \cdots (2 \cdot 84)$$

したがって、次式が得られる。

$$U_N = \kappa C_1 \frac{(2U_K - U_p)}{(2-1)} \quad \cdots \cdots (2 \cdot 85)$$

第 4 章で明らかにされるが、 C_1 は約 3 であり、したがって $\kappa C_1 \approx 1$ となるから、式 (2・82) は Karman の式と Prandtl の式とを 2 : (-1) で加重平均したものに相当し、平衡領域は壁面領域とある程度重複していると考えられる。¹⁰⁾

Fig. 2・18 は $C_1 = 3.0$ 及び 4.0 の U_N を、また $\kappa = 0.4$ の U_K 及び U_p をそれぞれ図示したものである。 U_p は U_K より若干大きく、 U_N は両者にまたがる形で分布しているが、それら相互の差異はたかだか摩擦速度 U_* 以内、すなわち乱れ強度以内であって、実用上はいずれを用いても妥当であると考えられる。

2・4・5 領域全体での乱流特性

これまで開水路乱流場を三領域に区分し、各領域における乱れ特性値の普遍関数表示や平均流速分布を乱れエネルギー収支に立脚して考察して来た。このように乱流場を小領域に区分して各々の諸特性を詳細に検討することは重要であるが、第 2・3 節のスペクトル空間での取扱いと同様に、領域全体に適用できる乱流特性に関する分布式を検討することは、実用的見地からはより重要である。すなわち、前者を「分解手法」とするなら、後者は「総合手法」とでも名付けられる。

ところで、Bradshaw (1967) によれば、乱れ特性は、局所的に一義的に決定される普遍特性表示が可能な成分 (active 成分という) と、周囲の外的条件の影響を受けてゆっくり変動する準定常的なゆらぎ成分 (inactive 成分という) とに区分される。⁹⁾ すなわち、inactive 成分は上流側からの流れの変遷状態 (履歴) に依存し、例えば洪水波などの準定常的な波動を伴う流れ、跳水場や断面急変部での局所流、壁面粗度の急変による内部境界層を伴う流れ等では inactive 成分は無視できないであろう。しかし、本研究で対象としている流れは最も単純な、十分に発達した 2 次元乱流であるから、この inactive 成分の寄与は無視できるものと推測される。上述の妥当性は第 4 章で詳しく検討されるが、当面開水路乱流場は active 成分で支配されている、すなわちこの乱流構造は普遍的特性を示すと考えてよく、これまでの議論もこの前提に立って進められてきた。

したがって、領域全体での乱れ特性に関する普遍関数表示は乱れの self-consistency に立脚して乱れエネルギーの挙動から新たに考察した方が良好な結果が得られよう。これらの検討は第 4 章で詳述することにして、以下では平均流

特性に関して若干の考察を行う。

上述のように、十分に発達した開水路流の平均流場も active 成分、すなわち局所的な特性のみによって支配されているから、これまでの混合距離理論に基づいた考察が妥当であると考えられる。換言すれば、平均流速分布に関する限り混合距離理論を適用して十分であるといえる。^{*})

したがって、式 (2・11) から平均流速分布を求めることは混合距離 l をいかに評価するかという問題に帰着される。混合距離理論が一つの乱流モデルである以上、限られた測点での平均流速の実測値から l を逆算し、その正確な実験式を決定した後、乱流場全体で成立する流速分布形を積分して得ようとした Nikuradse³⁾ や Reichardt (1951)¹⁰⁾ 等をはじめとする実験的研究の意義もここに十分認めることができる。また乱れエネルギー収支に立脚して混合距離を決定し、流速分布式を求めようとした前節の方法も前者に劣らず意義のあるものと考えられる。

さて、先述のように従来得られた周知の流速分布式と本研究で提案したそれとは大きな差異はなく、平均流速を含んだ諸々の派生式の簡素化や実用上の観点からはできるだけ簡単な流速分布式が望ましい。この意味から式 (2・84) の Prandtl の対数則分布は極めて実用価値が大きいと考えられる。なおこの式的前提条件は壁面近傍以外では適用できない $l = \kappa y$ であるにもかかわらず、この対数則分布は Fig. 2・18 で示したように他の分布式と大差がなかった。これは、 $l = \kappa y$ と仮定すると同時に $\tau = \tau_0$ と近似するため偶然にも良好な結果が得られているのである。実際、混合距離理論は

$$\frac{dU^+}{d\xi} = \Phi(\xi) \cdot \frac{1}{\kappa\xi}, \quad \Phi(\xi) \equiv \frac{\kappa\xi\sqrt{1-\xi}}{(l/h)} \quad \cdots \cdots (2 \cdot 86)$$

であり、式 (2・77) から計算された $\Phi(\xi)$ を Fig. 2・16 に破線で併用した。図から明らかなように、 $0 \leq \xi < 0.9$ では $\Phi(\xi) = (0.8 \sim 1.2)$ ではほぼ 1 に近い定数となるから、乱流場全域で Prandtl の対数則式が近似的に適用できよう。ただし、 $\xi \approx 1$ の自由水面近傍では、 $dU^+/d\xi|_{\xi=1} = \kappa^{-1} \neq 0$ となり、式 (2・86) を満足しなくなるが、これによる適用誤差は後述される。

以上の結果を比較するために、①式 (2・14) の Prandtl の対数則式と、②混合距離の正確な実験式である式 (2・77) に式 (2・13) の減衰因子 F を乗じて式 (2・11) を数値積分した結果とを Fig. 2・19 に示した。2 次元開水路流の全領域における平均流速分布として②の結果が最も正確であるとされるが、 $y^+ > 30$ では①の Prandtl の式はこれに非常に近い近似であるといえる。図には第 4 章で詳述する実験

^{*}) 乱流境界層では式 (2・1) の左辺 (advection 項) や $\partial p / \partial x$ が顕著にきいてくるから、平均流速分布等の計算は開水路流より複雑である。これらの計算法に関する最新の知見は文献 18) などに詳しい。

結果の一部を併示したが、①及び②の結果と良好に一致し、これまでの議論の妥当性を示している。上述の理由から自由水面近傍 ($y^+ = R_*$) では①の対数則分布は②の分布と確かに差異を示しているが、Fig. 2・19から明らかなようにこの差異はほぼ実験誤差内に収まる程度の大きさである。したがって、 $y^+ < 30$ の壁面領域では減衰因子 F を考慮した van Driest の式 (第 2・2 節参照) などが必要であるが、 $y^+ > 30$ のほぼ乱流場全域では Prandtl の式がかなりの精度で適用できると結論づけられる。

第 2・5 節 粗面開水路流の乱流特性

以上、滑面乱流を対象とした考察を進めてきたが、実際の水工問題で取扱う流れはむしろ粗面乱流であることが多く、開水路流に及ぼす壁面粗度の影響を明らかにすることは実用上きわめて重要である。しかし、粗度要素の大きさ、形状及び配列等によって流れは複雑な影響を受けるから、粗度の影響を理論的に解明することは非常に困難であり、従来多くの実験的研究が行われてきた³⁾。

第 1 章で指摘したように、本研究の目的の一つはこれらの従来の研究成果 (ほとんど平均流特性であるが) を踏まえて乱流構造に及ぼす壁面粗度の影響を系統的に検討することであるが、やはり実験的解明に頼らざるを得ない。第 4 章での実験的研究を遂行するに必要な予備知識を得るために、一様粒径粗度が乱流場に及ぼす影響に関して若干考察してみる。

2・5・1 粗面乱流に関する基礎的知見

粗面乱流は滑面乱流とその壁面特性が単に異なるだけであるから、前節までの滑面乱流場で予測された知見の多くは粗面乱流場にも適用されるものと考えられるが、後者の乱流特性の解明には次の 3 点がまず問題になる。

- ① 粗面乱流を特徴づけるパラメータは何か。
- ② 粗面乱流の河床底 ($y = 0$ の座標原点) をどこに選べば良いか。
- ③ 壁面粗度の影響がどの位の範囲に及ぶものか。

まず、本研究では一様粒径 k_s によって構成される稠密な壁面粗度を対象とするから、これは Nikuradse の砂粒相等粗度にほかならず、粗度の影響をすべて $k_s^+ \equiv k_s U_* / \nu$ で特徴づけてよい。このとき①に関して次のような区分が可能である¹⁾。

- (Ⅰ) 水理学的滑面 ($k_s^+ \leq 5$) 粗度要素が粘性底層内に完全に入るため、実質上滑面乱流と見なしてよい。
- (Ⅱ) 不完全粗面 ($5 \leq k_s^+ \leq 70$) 粗度要素が壁面領域の中央部まで占めるから、この領域は ν/U_* と k_s の二重特性スケール系を構成し、粘性と粗度の影響を共に受ける。
- (Ⅲ) 完全粗面 ($k_s^+ > 70$) 粗度要素が壁面領域をほぼ覆

うから、粘性の影響は無視でき、粗度の影響のみを受ける。

以上の粗面乱流の特性区分は、式 (2・14) の対数則を変形した次式

$$U^+ = \kappa^{-1} \cdot \ln(y/k_s) + C_r(k_s^+),$$

$$C_r(k_s^+) \equiv \kappa^{-1} \ln(k_s^+) + B \cdots \cdots \cdots (2 \cdot 87)$$

の切片定数 $C_r(k_s^+)$ の変化特性に従って行われたものであるが、現象論的にも妥当であることから本研究では乱れ特性の検討にも上述の区分を便宜上採用する。

次に、②に関しては現在でも明確な基準はないようである。⁴⁾ 現象論的に考えて、河床原点は $[0, k_s]$ の間にあるが、 $k_s \ll h$ である通常の粗度要素 (本研究ではこの場合を対象とする) では、座標原点をこの範囲で変化させても壁面から十分離れた主流領域では無次元座標 $\xi \equiv y/h$ に対する修正は小さい。したがって、乱流構造の表現が最も簡単になるような座標原点の選択が望ましい。Nikuradse 以来、式 (2・87) の対数則が壁面近傍まで成立するように座標原点を移動させるのが慣例であり、本研究でもこれに従う。このとき、第 4 章で明らかにするが、粗度要素の頂部から約 $k_s/4$ 下った位置に座標原点をとればよいことが確かめられた。¹⁰⁾

③の粗度の影響範囲に関しては、著者の知る限り現在でも不明のようである。粗面乱流になれば当然壁面せん断応力は増大するが、諸々の乱流特性を U_* で無次元表示すればかなりの範囲で普遍特性を示すであろう。滑面乱流とは単に境界条件が異なるだけであるから、両者の普遍関数などの程度差異を示すかは理論的予測が極めて困難であり、系統的な実験的研究にまたねばならない。したがって、以下では現象論的な立場から粗度の影響範囲を推測するにとどめる。

まず、前述のように開水路流は active 成分で支配され、乱れの相似性が強いから壁面から最も離れた自由水面領域には粗度の影響はほとんど及んでいないであろう。

次に、平衡領域はもともと外的な境界条件に左右されず、乱れの相似性が期待される領域であるが、前節で指摘したようにこの領域は隣接の擬似壁面領域^{*}) とある程度重複するから、後者に粗度の影響が現われるならば、平衡領域にもある範囲でこの影響が及んでいよう。

最後に、滑面乱流の壁面領域に対応する粗面乱流の擬似壁面領域では、特性長さスケールとして ν/U_* 及び k_s の 2 種類が考えられる。同様に第 9 章で考察される transpiration を有する流れでは 2 種類の特性速度スケールが存在するが、このような多重特性スケール系 (multi-scale) の乱流構造を解明することは現段階では非常に困難であり、⁵⁾ 近似的に単一な特性スケール系に縮約する必要がある。本研究は滑

^{*}) 粗面乱流では座標原点が移動されているから、滑面乱流の壁面領域と区別する意味で「擬似壁面領域」と呼ぶ。

面乱流との系統的な比較検討から粗度の影響を解明しようとするものであり、依然として ν/U_* を特性スケールに選ぶ方が合理的である。すなわち、 k_s は ν/U_* との比つまり k_s^+ をパラメータとして導入し、上述の二重特性スケール系を縮約させる。なお、 $k_s^+/4 \geq 100$ ならば擬壁面領域は完全に消滅するから、この縮約方法は $k_s^+ < 400$ で有効であるといえる。

2・5・2 粗度の影響に関する若干の予測

$\delta^+ \equiv k_s^+/4 \geq 10$ ならば、粘性底層のような粘性作用に支配された層はもはや消滅し、粗度要素は流れに突起物として作用するからこの乱流はいわば流下方向に一樣に発生させられた後流の集合体とも見なされよう。そして、この粗度によって攪乱されたエネルギーが圧力変動の形で粗度要素間の死水溝へと拡散されると考えられる。このとき式(2・3)の粘性項を無視し、 $[\delta, h]$ で積分すれば、式(2・6)に対応する次式が得られる。

$$\int_{\delta}^h -\overline{uv} \left(\frac{dU}{dy} \right) dy + U_0 U_*^2 = U_m U_*^2 \quad \dots\dots\dots (2.88)$$

ここで、 U_0 は粗度要素の頂部における速度である。

平均流のエネルギー損失 $U_m U_*^2$ は、乱れエネルギーの発生と粗度要素頂部でなされる仕事 $U_0 U_*^2$ とに変換され、後者は先述のように死水溝へ拡散され、熱逸散するものと考えられる。すなわち、この $U_0 U_*^2$ の仕事が滑面乱流の直接逸散率 E に対応するものである。

次に、式(2・87)を式(2・88)に代入すれば、次のようになる。

$$\sqrt{2/f} = \kappa^{-1} [\ln(h/k_s) + \{ (1/4)(k_s/h) - 1 \}] + C_r(k_s^+) \quad \dots\dots\dots (2.89)$$

摩擦損失係数 f は R_* にほとんど依存せず、相対粗度 k_s/h の関数となり、周知の Stanton 図表の特性を示すことがわかる。先述のように粗度要素が突起物として流れに攪乱を与えるのであれば、攪乱渦は粗度要素によって崩壊され易い、すなわち平均渦径は小さくなるものと推測される。一方、式(2・5)、(2・87)より $\epsilon h/U_*^3 \sim P h/U_*^3 = (1-\xi)(\kappa\epsilon)^{-1}$ であるから、 $\epsilon h/U_*^3$ は k_s^+ にほとんど左右されず、普遍関数表示が可能であろう。

以上の推測が正しければ、式(2・50)から粗面乱流になると乱れ強度 (u'/U_*) は減少することになる。その結果、粗度の影響は乱れエネルギー分布、したがって乱れエネルギーの拡散率 T_r にも波及するものと考えられる。 $P \sim \epsilon$ ならば式(2・30)より ($T_r + R$) はほぼ定数となるから、圧力による拡散率 R も粗度の影響を受ける結果となるが、これは死水溝への拡散機能を行うという前述の推測と矛盾

しない。本節で展開された粗度の影響に関する推論の妥当性は第4章及び第5章で実験的に詳しく検討される。

第2・6節 乱れ発生機構及び瞬間 Reynolds 応力の構造

本研究は、乱れの微細構造よりもその巨視的構造に主眼をおいて乱流構造を解明しようとするものであり、Fig. 2・5のモデルにおける乱れ発生領域にむしろ注目している。

さて、時間平均された乱れ発生率 P は $-\overline{uv} \partial U / \partial y$ であり、前節までその挙動を考察して来たが、乱れの発生機構を解明しようとするれば、瞬間的な乱れ発生率 $-\overline{uv} \partial U / \partial y$ すなわち、瞬間 Reynolds 応力 $-\overline{uv}$ の構造を明らかにしなければならない。第1章で指摘したように、近年の乱流研究ではこの乱れ発生機構の解明やそれに伴う coherent な運動機構の解明が中心的な課題と見なされ、点計測法及び可視化法を駆使した実験的研究が精力的に行われている。²⁰⁾

第5章で述べる乱れ発生機構に関する実験的研究に先立って、本節ではまず従来の可視化観察結果を参照して乱れ発生機構を定性的に概観し、次に条件付確率密度関数を新たに導入して、この機構を定量的に予測しようとするものである。

2・6・1 乱れ発生機構に関する定性的考察

1960年代初頭に早くも Townsend, Grant, Lighthill 等によって今日でいう乱れの bursting 現象の存在が予測されていたようであるが、本格的な研究は1960年代後半 Stanford 大学の Kline ら (1967) のグループによるものが最初であろう。²¹⁾

Kline ら (1971) は、滑面乱流境界層を水素気泡で可視化観測し、乱れ発生に関する bursting 現象の過程を次のように説明した。²²⁾

① 壁面近傍で横断方向に高速域と低速域の縞 (streak) が形成され、後者は vortex-stretching によって徐々に浮上 (lift-up) して、渦度の集中が起こり流速分布は著しく屈曲するようになる。

② この屈曲領域から下流で渦回転 (oscillatory motion) が起こり、この渦回転は次第に成長していく。

③ ある限界の位置でこの渦運動は突如として壁面の外向きに噴出し (ejection)、周囲の流体と激しく相互作用を演じながら崩壊していく (break-up)。

一方、Kline らとほぼ同じ頃、Corino ら (1969) らは滑面管路流の壁面領域を可視化観測し、Kline らと同様な過程の bursting 現象を確認したが、break-up の後に加速流による掃流 (sweep) 機構が存在することを新たに発見した。²³⁾ Fig. 2・20 は、Corino らが観察した一連の bursting 現象の模式図であり、各段階を説明すると次のようになる。

(1) $0 < y^+ < 30$ で減速流域が上流側から入り込み、流

速勾配は緩和される。

(2) 局所的平均流速と同程度の加速流域が上流から壁面に平行ないし内向きに侵入する。これは平均流によって移流される大きな攪乱渦のようである。

(3) 加速流域が減速流域と相互作用をせずに横断方向に離れて共存すれば、二層流速域が形成される。これは Kline らが観察した高速・低速渦と考えられる。

(4) 減速流域に加速流域が重なれば、壁面からある高さには急激な流速勾配すなわち強いせん断層が形成され、渦度の集中が起こる。

(5) 加速流域が減速流域をしぼり出すような挙動、すなわち後者が突然 eject し、前者と激しい相互作用を演ずる。一度 ejection が発生すると、(2)の段階直後でさえ ejection が種々の周期で誘発されるが、壁面領域全体が加速流域で完全に占められる(6)の段階以前で発生するようである。この挙動は、Kline らの②及び③に対応している。

(6) 再び加速流域が侵入し、減速流域を sweep して通常の流速分布形にもどる。

以上概観した bursting 現象の各事象は常に規則正しく起きるのではなく、相当重複したり短絡的な過程をとるのが実状であって、平均的にみて上述の過程が存在しているにすぎない。このことを考慮すれば Kline らと Corino らの観察結果はほぼ同一であると考えてよく、またこのような bursting 現象の挙動は Grass (1971)をはじめとする多くの研究者によっても確認されている。²⁴⁾

これらの可視化観測から得られた定性的な知見をもとに、乱れ発生機構をより定量的に説明することが乱流のマクロな挙動の解明に必須であると考えられ、このためには瞬間 Reynolds 応力の構造を明らかにする必要がある。これに先立ってまず、上述の定性的に見出された各事象を Reynolds 応力の挙動に対応づけることにする。

Fig. 2・21 は、 (u, v) の正負に従って瞬間 Reynolds 応力 uv を 4 つの事象に区分したものである。^{*)} Fig. 2・20 の事象(5)は減速流域 ($u < 0$) が壁面から外向きに eject される ($v > 0$) 現象であるから、「ejection」と命名し、 $u-v$ 平面の第 2 象限に対応づける。事象(6)は、逆に加速流域 ($u > 0$) が壁面側に侵入してくる ($v < 0$) 現象であり、「sweep」と命名され、第 4 象限に対応づけられる。ejection 及び sweep の前後では加速流や減速流の小規模な相互作用が存在すると推定され、これらを一括して「interaction」と命名するが、加速流が壁面から離れる現象を「outwards」、減速流が壁面側に来る現象を「inwards」と区別してそれぞれ第 1 及び第 3 象限に対応づけることにする。なお、Fig. 2・20 の(1)から(4)までの事象は Reynolds 応力の発生にあまり寄与しないものと推測できるが、 $u-v$ 平面のどこかに

属すから、例えば第 2 象限が(5)の ejection 事象だけから構成されているとは考えられない。したがって、Fig. 2・20 (a)のような Reynolds 応力の区分では、第 2 及び第 4 象限は(1)～(4)の事象を一部含んでいる可能性があり、それぞれ「ejection 的」及び「sweep 的」と厳密には呼ぶことにする。

先述のように、bursting 現象は時間的にも場所的にもかなり不規則に発生するから、Fig. 2・20 で示した一連の事象はあくまでも理想化されたプロセスといえる。このため、比較的広範囲の瞬間流速プロファイルを把握できる可視化法でさえこの現象の全貌を明らかにすることはそれほど容易ではなく、点計測法ではさらに困難であろう。すなわち、一測点で得られる瞬間 Reynolds 応力の挙動から bursting 現象の全貌を解明することは困難ではあるが、この現象の定量的評価を可能にするという点では有用な手段である。

以下では瞬間 Reynolds 応力の条件付確率密度関数を導入してこの構造を理論的に予測し、第 5 章での実験的検討に当たっての基礎的知見を与えることとする。

2・6・2 速度変動の確率密度関数

乱れ変動を表現する数学的手段としては第 2・3 節で展開されたスペクトル解析法が極めて有用であるが、確率解析法もそれに劣らず有益である。前者は乱れ(攪乱渦)の規模に関する情報を提供するのに対して、後者は乱れ(攪乱渦)の発生回数に関する情報をもたらすから、両者は乱流解析法のいわば主軸と考えられる。以下では乱れ変動の確率密度関数に関して考察する。²⁶⁾

まず、速度変動成分をその乱れ強度で正規化した $\hat{u} \equiv u/u'$ 及び $\hat{v} \equiv v/v'$ を確率変数として用いる。次に \hat{u} と \hat{v} との結合確率密度関数を $p(\hat{u}, \hat{v})$ 、その特性関数を $\Phi(\xi, \eta)$ 、 $(j+k)$ 次モーメントを M_{jk} 、それに対応するキュムラントを Q_{jk} とすれば、次の定義式が成立する。¹⁴⁾

$$\Phi(\xi, \eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} p(\hat{u}, \hat{v}) \cdot \exp i(\hat{u}\xi + \hat{v}\eta) d\hat{u} d\hat{v} \quad \dots\dots\dots (2\cdot90)$$

$$M_{jk} \equiv \overline{\hat{u}^j \hat{v}^k} = \frac{1}{(i)^{j+k}} \cdot \frac{\partial^{j+k}}{\partial \xi^j \partial \eta^k} \Phi(\xi, \eta) \Big|_{\xi=\eta=0} \quad \dots\dots\dots (2\cdot91)$$

$$Q_{jk} \equiv \frac{1}{(i)^{j+k}} \cdot \frac{\partial^{j+k}}{\partial \xi^j \partial \eta^k} \ln \Phi(\xi, \eta) \Big|_{\xi=\eta=0} \quad \dots\dots\dots (2\cdot92)$$

$\Phi(\xi, \eta)$ を原点 $\xi = \eta = 0$ で Taylor 展開すれば、

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi'} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta'} \right)^n \Phi(\xi', \eta') \Big|_{\xi'=\eta'=0} \quad \dots\dots\dots (2\cdot93)$$

であるから、 M_{jk} は $\Phi(\xi, \eta)$ の Taylor 級数の係数に相当

*) Kline らは、「ejection」を「burst」と命名し、Grass は「sweep」を「inrush」と命名しているが、用語の統一が望ましく、本研究では Brodkey ら (1974) による用語に従った。²⁵⁾

し、同様に Q_{jk} は $\ln \phi(\xi, \eta)$ の Taylor 級数の係数となる。したがって、式(2.91)～(2.93)からモーメント M_{jk} とキュムラント Q_{jk} との関係を容易に導くことができる。すなわち、 $M_{10} = \hat{u} = 0$, $M_{01} = \hat{v} = 0$, $M_{20} = \hat{u}^2 = 1$, $M_{02} = \hat{v}^2 = 1$ 及び $M_{11} = \overline{uv} = \overline{u'v'} \equiv -R$ (R は相関係数) を考慮すれば、次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{00} &= 1, \quad Q_{10} = 0, \quad Q_{20} = 1, \\ Q_{11} &= -R, \quad Q_{30} = M_{30}, \quad Q_{21} = M_{21} \\ Q_{40} &= M_{40} - 3, \quad Q_{31} = M_{31} + 3R, \\ Q_{22} &= M_{22} - 2R^2 - 1, \dots \end{aligned} \right\} \dots (2.94)$$

ここで、 $j < k$ なる Q_{jk} は、対応する添字 (j, k) を相互に交換すれば得られる (例えば、 $Q_{03} = M_{03}$ である)。

さて、乱流現象の最も顕著な性質の一つは高次キュムラントが無視できる点であり、等方性乱流理論においてさえ5次以上のキュムラントが通常無視されている (キュムラント打ち切り理論)¹⁾。ここでもまず、5次以上の高次キュムラントを打ち切って、式(2.93)を近似表現すれば、式(2.92)、(2.94)から次式が得られる。

$$\ln \phi(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 2R\xi\eta + \eta^2) + \sum_{j+k=3}^4 (z)^{j+k} \frac{Q_{jk}}{j!k!} \xi^j \eta^k \dots (2.95)$$

したがって、 $p(\hat{u}, \hat{v})$ は式(2.90)の逆変換を行うことによって求められ、次のようになる。

$$\begin{aligned} p(\hat{u}, \hat{v}) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, \eta) \cdot \exp -i(\hat{u}\xi + \hat{v}\eta) d\xi d\eta \\ &= G(\hat{u}, \hat{v}) + \sum_{j+k=3}^4 (-1)^{j+k} \\ &\quad \times \frac{Q_{jk}}{j!k!} \frac{\partial^{j+k}}{\partial \hat{u}^j \partial \hat{v}^k} G(\hat{u}, \hat{v}) \\ &\dots (2.96) \\ &\equiv G(\hat{u}, \hat{v}) \left[1 + \sum_{j+k=3}^4 \frac{Q_{jk}}{j!k!} H_{jk}(\hat{u}, \hat{v}) \right] \\ &\dots (2.97) \end{aligned}$$

ここで、 $G(\hat{u}, \hat{v})$ は次式で定義される2変数の Gauss 分布 (正規分布) である。

$$G(\hat{u}, \hat{v}) \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2}} \exp \left\{ -\frac{\hat{u}^2 + 2R\hat{u}\hat{v} + \hat{v}^2}{2(1-R^2)} \right\} \dots (2.98)$$

式(2.97)は Gram-Charlier 型の結合確率分布の特別な場合に相当し、より高次項まで必要なときは Kampé de Fériet (1966) が最初に導いた次の一般式を使えばよいが、非常に複雑である。²⁷⁾

$$\begin{aligned} p(\hat{u}, \hat{v}) &= G(\hat{u}, \hat{v}) \\ &\quad \times \sum_{j+k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} \overline{H_{jk}(\hat{u}, \hat{v})} H_{jk}(\hat{u}, \hat{v}) \\ &\dots (2.99) \end{aligned}$$

ここで、 H_{jk} 及び $\overline{H_{jk}}$ は2変数の Hermite 多項式であり、詳しくは文献 27) を参照されたい。

同様に、1変数の確率密度関数 $p(\hat{u})$ は比較的簡単に次のように求められる ($p(\hat{v})$ に関しても同様である)。

$$\begin{aligned} p(\hat{u}) &= G(\hat{u}) + \sum_{j=3}^4 (-1)^j \frac{Q_{j0}}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \hat{u}^j} G(\hat{u}) \\ &\dots (2.100) \\ &= G(\hat{u}) \left[1 + \frac{Q_{30}}{6} (\hat{u}^3 - 3\hat{u}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q_{40}}{24} (\hat{u}^4 - 6\hat{u}^2 + 3) \right] \dots (2.101) \end{aligned}$$

ここで、 $G(\hat{u}) \equiv (2\pi)^{-1/2} \exp(-\hat{u}^2/2)$ は1変数の Gauss 分布である。

キュムラント Q_{jk} ($j+k \geq 3$) がすべて零のとき式(2.97)や(2.101)で表現された Gram-Charlier 型の確率分布は Gauss 分布と完全に一致するから、 Q_{jk} はその分布の歪みや尖りの程度を表わす指標と考えられ、Gauss 分布からの補正項ともいえる。

次に、正規化された瞬間 Reynolds 応力 $w \equiv uv/\overline{uv}$ の確率密度関数 $p_w(w)$ を求めてみる。²⁸⁾ $p(\hat{u}, \hat{v})$ の確率変数を (\hat{u}, \hat{v}) から (\hat{u}, w) へと変数変換を行った後、積分すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} p_w(w) &= \frac{R}{\pi\sqrt{1-R^2}} \exp \left(\frac{R^2 w}{1-R^2} \right) \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\hat{u}^2 + R^2(w/\hat{u})^2}{2(1-R^2)} \right\} \times \\ &\quad \left[1 + \sum_{j+k=3}^4 \frac{Q_{jk}}{j!k!} \cdot \frac{1}{2} \{ H_{jk}(\hat{u}, -Rw/\hat{u}) \right. \\ &\quad \left. + H_{jk}(-\hat{u}, Rw/\hat{u}) \} \right] \frac{d\hat{u}}{\hat{u}} \dots (2.102) \end{aligned}$$

しかし、Hermite 多項式 $H_{jk}(x, y)$ は $(j+k)$ が奇数のとき奇関数、偶数のとき偶関数となるから、 $p_w(w)$ は奇数次のキュムラント項が相互に消去されて次のようになる。

$$\begin{aligned} p_w(w) &= \frac{R}{\pi\sqrt{1-R^2}} \exp \left(\frac{R^2 w}{1-R^2} \right) \times \\ &\quad \left[K_0 \left(\frac{R|w|}{1-R^2} \right) + (4 \text{ 次以上の偶数次キ} \right. \\ &\quad \left. \text{ュムラント項}) \right] \equiv 2p_G(w) + (4 \text{ 次以上の} \\ &\quad \text{偶数次キュムラント項}) \dots (2.103) \end{aligned}$$

ここで、 $K_\alpha(x)$ は α 次変形第 2 種 Bessel 関数であり、級数展開すれば容易に計算できる。

以上のように、 $p_w(w)$ に 3 次キュムラント項は消去されて直接的には現れないが、後述するようにこの項は乱れエネルギーの拡散率と直接結びつくから、物理的にいえば 4 次キュムラント項よりはるかに重要なものと考えられる。実際、4 次以上のキュムラント項を無視して得られた $p_w(w) \equiv 2p_G(w)$ は実質上 Gauss 分布から導かれる確率密度関数そのものであり、Lu ら (1973)²⁸⁾ Antonia ら (1973)²⁹⁾ 著者ら (1975)³⁰⁾ 等はこの $2p_G(w)$ でも実測された w の確率分布を相当な高精度で説明できることを明らかにした。したがって、以下の議論では簡単のために 4 次以上のキュムラント項を無視するが、この近似の妥当性は第 5 章で検証される。

さて、Fig. 2・22 は相関係数 R をパラメータにとり、 $p_w(w)$ を計算した結果を示したものである。 $K_0(w)$ は $w=0$ で無限大となる、すなわち $p_w(w)$ も $w=0$ で無限大となるから、Reynolds 応力の確率分布形は $w=0$ の近傍で非常に尖っている。また、 $\int_{-\infty}^{\infty} w \cdot p_w(w) dw = 1$ であるから、 $w > 0$ の $p_w(w)$ の方が $w < 0$ のものより同じ $|w|$ に対して大きな値を示し、 $w=0$ 軸に関して非対称な分布形となる。

このように、乱れ変動成分 u や v の確率分布はほぼ式 (2・101) の Gauss 分布に従うのに対して、Reynolds 応力 w の確率分布は Gauss 分布と著しく異なっている点が注目される。すなわち、この分布の中央部は非常に尖り、その周辺は長い裾をもっているから、瞬間 Reynolds 応力の挙動は断続性 (intermittency) を示すことが予測される。これらの特性は、 w に関する Skewness 因子や Flatness 因子を調べれば明らかにされるから、第 5 章で実験的に検討される。

また、相関係数 R が増加すると、 $|w|=0$ 近傍の $p_w(w)$ は増大し、逆に $|w| \gg 0$ の周辺部の $p_w(w)$ は減少して分布形の裾は小さくなる。換言すれば、 R が小さいほど Reynolds 応力の分布形はより平坦となり、一様分布形へと近づく結果になるが、これは $\overline{uv} \rightarrow 0$ を表わしたのと考えられる。

2・6・3 瞬間 Reynolds 応力の条件付確率密度関数

3 次キュムラント項の重要性が推測されたにもかかわらず $p_w(w)$ にこの項が現れないのは、Reynolds 応力の無条件確率分布 $p_w(w)$ を扱ったからであり、従来の研究者が bursting 現象を瞬間 Reynolds 応力の挙動として理論的に考察できなかったのもここに起因しているものと考えられる^{28), 29)}

以上の点に鑑み、bursting 現象の機構を理論的に予測するために瞬間 Reynolds 応力の条件付確率分布を新たに導入する²⁶⁾

さて、Fig. 2・21(a)に従って、区分された各事象における w の確率密度関数を $p_1(w)$ (outwards interaction)、 $p_2(w)$ (ejection)、 $p_3(w)$ (inwards interaction) 及び $p_4(w)$

(sweep) と定義すれば次式が成立する。

$$p_w(w) = p_1(w) + p_2(w) + p_3(w) + p_4(w) \quad (2 \cdot 104)$$

式 (2・97) から条件付計算を行えば、 $p_i(w)$ ($i=1 \sim 4$) が得られるが²⁶⁾ $p_2(w)$ を例示すると次のようになる。

$$p_2(w) = \frac{R \cdot \exp(Rt)}{2\pi \sqrt{1-R^2}} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{x^2 + (t/x)^2}{2} \right\} \times \left[1 - \frac{1}{(1-R^2)^{3/2}} \{ A_1 x^3 - A_1^*(t/x)^3 - A_2 x^2(t/x) + A_2^* x(t/x)^2 - A_3 x + A_3^*(t/x) \} \right] \frac{dx}{x} \quad (2 \cdot 105)$$

ここで、

$$\begin{aligned} t &\equiv R w / (1 - R^2), \quad x \equiv \hat{u} / \sqrt{1 - R^2} \\ A_1 &\equiv (Q_{30} + R^3 Q_{03}) / 6 + R (Q_{21} + R Q_{12}) / 2 \\ A_2 &\equiv R (Q_{30} + R Q_{03}) / 2 + \{ (2R^2 + 1) Q_{21} + R (2 + R^2) Q_{12} \} / 2 \\ A_3 &\equiv (Q_{30} + R Q_{03}) / 2 + \{ 3R Q_{21} + (2R^2 + 1) Q_{12} \} / 2 \end{aligned} \quad (2 \cdot 106)$$

A_i^* ($i=1 \sim 3$) は A_i の定義式中のキュムラント Q_{jk} の添字 (j, k) を交換したもの、すなわち Q_{kj} とおいた式である。

ところで、次のような数学公式が得られている³¹⁾

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{x^2 + (t/x)^2}{2} \right\} x^n \left(\frac{t}{x} \right)^m \frac{dx}{x} \\ = t^m |t|^{\frac{1}{2}(n-m)} K_{\frac{1}{2}(n-m)}(|t|) \end{aligned} \quad (2 \cdot 107)$$

$$K_{\alpha+1}(t) = (2\alpha/t) K_\alpha(t) + K_{\alpha-1}(t),$$

$$K_{-\alpha}(t) = K_\alpha(t) \quad (2 \cdot 108)$$

これらの公式を使い式 (2・105) を整理すれば、 $p_2(w)$ 以外にも同様に計算できて、最終的に次式が得られる。

$$p_1(w) = p_G(w) + \phi^+(w), \quad (w < 0) \quad (2 \cdot 109)$$

$$p_2(w) = p_G(w) + \phi^-(w), \quad (w > 0) \quad (2 \cdot 110)$$

$$p_3(w) = p_G(w) - \phi^-(w), \quad (w < 0) \quad (2 \cdot 111)$$

$$p_4(w) = p_G(w) - \phi^-(w), \quad (w > 0) \quad (2 \cdot 112)$$

ここで、

$$\phi^\pm(w) \equiv \frac{R}{2\pi} \exp(Rt) \cdot K_{\frac{1}{2}}(|t|) \frac{\sqrt{|t|}}{(1-R^2)^2}$$

$$\times \left\{ (1+R) \left(\frac{S^+}{3} + D^+ \right) |t| - \left(\frac{2-R}{3} S^+ + D^+ \right) \right\} \dots\dots\dots (2\cdot113)$$

$$\phi^-(w) \equiv \frac{R}{2\pi} \exp(Rt) \cdot \frac{\sqrt{t}}{\mathbf{K}_{\frac{1}{2}}(t)} \frac{1}{(1+R)^2} \times \left\{ (1-R) \left(\frac{S^-}{3} + D^- \right) t - \left(\frac{2+R}{3} S^- + D^- \right) \right\} \dots\dots\dots (2\cdot114)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S^+ \equiv (S_v + S_u)/2 = (Q_{03} + Q_{30})/2, \\ S^- \equiv (S_v - S_u)/2 = (Q_{03} - Q_{30})/2, \\ D^+ \equiv (D_v + D_u)/2 = (Q_{21} + Q_{12})/2, \\ D^- \equiv (D_v - D_u)/2 = (Q_{21} - Q_{12})/2 \end{array} \right. \dots\dots\dots (2\cdot115)$$

$S_u \equiv \bar{u}^3$ 及び $S_v \equiv \bar{v}^3$ はそれぞれ u 及び v の skewness 因子であり、 $D_u \equiv \bar{u}^2 \bar{u}$ 及び $D_v \equiv \bar{v}^2 \bar{v}$ はそれぞれ u 方向及び v 方向への乱れの拡散を表わす指標と考えられることから、ここでは diffusion 因子と名付ける。

以上得られた条件付確率分布 $p_i(w)$ ($i=1\sim4$) は式 (2\cdot104) から $p_w = 2p_G(w)$ となり、 $\phi^+(w)$ 及び $\phi^-(w)$ は打消されて式 (2\cdot103) と一致する。したがって、一連の bursting 現象を考察するには付加項 $\phi^+(w)$ 及び $\phi^-(w)$ が重要となり、これらの項に関する乱れ変動の 3 次相関、すなわち skewness 及び diffusion 因子が本質的な役割を果たしていると推測される。また例えば、ejection 事象 (u, v) が $(-u, v)$ に変換されると、 $R \rightarrow -R$ 、 $S \rightarrow S^+$ 、 $D^- \rightarrow D^+$ 及び $w > 0 \rightarrow w < 0$ ($t \rightarrow -t$) となるから、 $p_G(w) \rightarrow p_G(w)$ 、 $\phi^-(w) \rightarrow \phi^+(w)$ 、すなわち $p_2(w) \rightarrow p_1(w)$ となり、outwards interaction 事象へと変換されることになり、実際の現象と符合する。

次に、Lu ら (1973) が行ったように²⁹⁾ 瞬間 Reynolds 応力 w にレベル H を設定し、Fig. 2\cdot21 (b) に示すように $|w| < H$ を「hole (孔)」事象と定義して w を 5 つの事象に条件区分する。^{*}このとき、各事象が占有する時間率を $T_i(H)$ 及び Reynolds 応力への寄与率を $RS_i(H)$ とそれぞれ定義すれば、次のように計算できる。

$$T_i(H) = \left\{ \begin{array}{l} \int_H^\infty p_i(w) dw, \quad (i=2, 4) \\ \int_{-\infty}^{-H} p_i(w) dw, \quad (i=1, 3) \end{array} \right. \dots\dots\dots (2\cdot116)$$

$$T_5(H) = \sum_{i=1}^4 \int_{-H}^H p_i(w) dw = 1 - \sum_{i=1}^4 T_i(H) \dots\dots\dots (2\cdot117)$$

^{*} Lu らの定義は $|uv/u'v'| < H'$ すなわち $R|w| < H'$ であり、 $H' = RH$ なるレベル設定である。

$$RS_i(H) = \left\{ \begin{array}{l} \int_H^\infty w \cdot p_i(w) dw > 0, \\ \int_{-\infty}^{-H} w \cdot p_i(w) dw < 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (i=2, 4) \\ (i=1, 3) \end{array} \dots\dots\dots (2\cdot118)$$

$$RS_5(H) = \sum_{i=1}^4 \int_{-H}^H w \cdot p_i(w) dw = 1 - \sum_{i=1}^4 RS_i(H) \dots\dots\dots (2\cdot119)$$

$H=0$ のときは、Fig. 2\cdot21 (a) に示した各事象にはかわらず、bursting 事象の大小関係等が判別される。 H をパラメータとして零から増加させるに従い、「hole」事象が増大し、Fig. 2\cdot20 の(1)から(4)までの事象はこれに包含されてしまうと考えられるから、 H のレベルが実際に可視化観測される ejection や sweep 事象を点計測データから抽出する「あるフィルター」として機能するものと期待できる。そして、 $T_i(H)$ や $RS_i(H)$ は、基礎的パラメータである R 、 S^+ 、 S^- 、 D^+ 及び D^- が既知となれば計算できるから、第 5 章で詳細に検討され、bursting 現象の内部機構を明らかにすることができる。

2\cdot6\cdot4 乱れ発生時の流速変動の挙動

これまで瞬間 Reynolds 応力 w の特性に注目してきたが、 w がある任意のトリガレベル H に達したとき、乱れ変動成分 u 及び v がいかなる挙動を示すかは興味ある課題である。第 5 章で明らかにされるが、Reynolds 応力の主成因は ejection と sweep とであって、これらの挙動すなわち高速流域と低速流域との相互作用機構は乱流混合モデルの基本概念でもあるから、 H をパラメータとして u 及び v の条件付確率分布特性を明らかにすることは極めて重要である。³²⁾

さて、 $w=H$ での ejection を発生させている乱れ変動成分 u の確率分布を $p_e(\hat{u}|H)$ 、その平均値を $\hat{u}_e(H)$ とすれば、

$$\hat{u}_e(H) = \frac{1}{p_2(H)} \cdot \int_{-\infty}^0 \hat{u} \cdot p_e(\hat{u}|H) d\hat{u} \dots\dots\dots (2\cdot120)$$

であり、また $w=H$ で sweep が発生したときの u の平均値 $\hat{u}_s(H)$ も同様に求められる。

いま、式 (2\cdot97) 及び (2\cdot109) を式 (2\cdot120) に代入し、計算すれば次式を得る。

$$\hat{u}_e(H) = - \frac{\sqrt{2} \mathbf{K}_{\frac{1}{2}}(Z) + \delta_1(Z)}{\mathbf{K}_0(Z)/r + \delta_2(Z)} \dots\dots\dots (2\cdot121)$$

$$\hat{u}_s(H) = \frac{\sqrt{Z} \frac{K_1(Z) - \delta_1(Z)}{2}}{K_0(Z)/r - \delta_2(Z)} \dots\dots (2\cdot122)$$

ここで、 $Z \equiv RH/r^2$ 、 $r \equiv \sqrt{1-R^2}$ であり、

$$\text{また、} \begin{cases} \delta_1(Z) = - \{ (B_{01}Z + B_{02}Z^2)K_0(Z) + \\ (B_{11}Z + B_{12}Z^2)K_1(Z) \} / r^3 \\ \delta_2(Z) = 2\pi\phi^-(H) \cdot \exp(-RZ)/R \end{cases} \dots\dots (2\cdot123)$$

$$\begin{cases} B_{01} \equiv R(Q_{30} + 3Q_{12})/2 + \{ (2R^2 + 1)Q_{21} \\ + Q_{03} \} / 2 \\ B_{11} \equiv (Q_{30} + 3Q_{12})/6 + R \{ 3Q_{21} + \\ (3 - 2R^2)Q_{03} \} / 6 \\ B_{02} \equiv R(R^2 + 3)(Q_{30} + 3Q_{12})/6 + \\ (3R^2 + 1)(Q_{03} + 3Q_{21})/6 \\ B_{22} \equiv (3R^2 + 1)(Q_{30} + 3Q_{12})/6 + \\ R(R^2 + 3)(Q_{03} + 3Q_{21})/6 \end{cases} \dots\dots (2\cdot124)$$

$\hat{u}_e(H)$ や $\hat{u}_s(H)$ の概略的な形を知るには、 $Q_{jk} = 0$ すなわち、 $\delta_1(Z) = \delta_2(Z) = 0$ と近似すればよい。しかも、Bessel 関数は $K_{1/2}(Z) = K_0(Z)$ と近似されるから、 $\hat{u}_e(H) = -\sqrt{RH}$ 及び $\hat{u}_s(H) = \sqrt{RH}$ となる。換言すれば Reynolds 応力がある任意のレベルに達したとき、これを生み出している乱れ変動成分の平均値はこのレベルの平方根に比例するような挙動を示し、 u 変動成分に関しては ejection で負の値が、sweep で正の値がそれぞれ寄与しているといえる。

最後に、Fig. 2・21(b)に示したように、Reynolds 応力があるトリガレベル H 以上の ejection 及び sweep を発生させている u の条件付確率分布、すなわち $p_e(\hat{u} | w \geq H)$ 及び $p_s(\hat{u} | w \geq H)$ に関して考察する³²⁾

式(2・97)を $w \geq H$ で積分すれば、次式が得られる。

$$p_e(\hat{u} | w \geq H) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\hat{u}^2}{2}\right) \int_X^\infty (\phi_1(x) + \phi_2(x)) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \dots\dots (2\cdot125)$$

$$p_s(\hat{u} | w \geq H) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\hat{u}^2}{2}\right) \int_X^\infty (\phi_1(x) - \phi_2(x)) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \dots\dots (2\cdot126)$$

ここで、 $X \equiv R(H/|\hat{u}| - |\hat{u}|)/r$

$$\begin{cases} \phi_1(x) \equiv 1 + Q_{30}\{\hat{u}^3 - 3\hat{u}(1-R^2x^2)/r^2\}/6 \\ - \hat{u}(2RQ_{21} + Q_{12})(1-x^2)/2r^2 \\ \phi_2(x) \equiv \hat{u}^2(RQ_{30} + Q_{21})x/2r \\ + (A_1^*x^3 - A_3^*x)/r^3 \end{cases} \dots\dots (2\cdot127)$$

当然、 $H \rightarrow -\infty$ のとき $X \rightarrow -\infty$ となって、寄関数である

$\phi_2(x)$ は消去され、また Gauss 分布 $G(x)$ は $\int_{-\infty}^\infty G(x) dx = \int_{-\infty}^\infty x^2 \cdot G(x) dx = 1$ であるから、式(2・125)や(2・126)は式(2・101)に一致する。なお、これまで u 変動成分に関して考察してきたが、 v 変動成分に関してもまったく同様に扱うことができ、このときは対応するキュムラント係数を単に交換すればよい。

第2・7節 結 言

本章は、開水路流の乱流構造に関する基礎的知見を得るために、スペクトル密度関数論及び確率密度関数論を解析上の主軸として乱れエネルギーの収支やその発生機構を理論的に考察したものである。まず第2・2節では、滑面開水路乱流場の基礎方程式に関して、従来の研究成果を参照しながら統一的な考察を進め、平均流エネルギー及び乱れエネルギーの収支関係を運動方程式に基づいて追求し、これらのエネルギーの変遷過程を説明する模式図を提案した。

次に、第2・3節では乱れエネルギーのスペクトル密度関数に関して詳細に論じた。すなわち、一次元波数空間を現象論的な立場から発生小領域、慣性小領域及び粘性小領域とに区分し、従来の知見に基づいて各領域の特性を概観すると共に、各領域を統合する目的で全波数空間で成立するスペクトル分布形を提示し、各小領域間の関連や特性渦スケールの関係を考察した。そして、乱れエネルギーの輸送に関する簡単なモデル(給水管モデル)を提示し、このモデルに立脚して乱れエネルギーの逸散率に関する3種類の評価方法を提案した。

第2・4節は、前節までの知見に基づいて乱流場の領域区分を行い、各領域の乱流特性を論じたものである。すなわち、給水管モデルとの類似性から開水路乱流場を壁面領域、平衡領域及び自由水面領域の3つに区分して各領域の乱れ特性を考察し、また乱れエネルギーの収支関係から平均流速分布式を新たに導いて従来の結果と比較検討し、それらの妥当性を確かめた。

第2・5節では、開水路乱流に及ぼす壁面粗度の影響が簡単に検討された。

最後の第2・6節は、乱れ発生機構に関して若干理論的予測を行い、この解明に何らかの糸口を与えようと試みたものである。すなわち、速度変動の確率密度関数をキュムラント展開法から考察し、瞬間 Reynolds 応力の条件付確率分布を新たに誘導した。そして、瞬間 Reynolds 応力の構造、換言すれば bursting 現象の各事象の挙動を予測できる理論式を幾つか提示した。

以上の理論展開にはさらに検討を要する面も多く、決して十分なものではないが、第4章以下の実験的研究を遂行する際に有力な理論的裏づけや解析方針を与えるものであろう。また逆にいえば、本章で得られた理論的予測の妥当性

は第4章以下で実験的に検証されるであろう。

第2章 参考文献

- 1) Rotta, J. C.: Turbulente Strömungen, B. G. Teubner, 1972 (大路通雄(訳): 乱流, 岩波書店, 1975)。
- 2) van Driest, E. R.: On turbulent flow near a wall, *J. Aeron. Sci.*, vol.23, pp.1007-1011, 1956.
- 3) Schlichting, H.: Boundary layer theory (6-th edi.), McGraw-Hill, pp.560-625, 1968.
- 4) Schubauer, G. B.: Turbulent processes as observed in boundary layer and pipe, *J. Applied Phys.*, vol.25, pp.188-196, 1954.
- 5) Tennekes, H. & Lumley, J. L.: A first course in turbulence, MIT Press, 1972.
- 6) Bradshaw, P.: 'Inactive' motion and pressure fluctuation in turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, vol.30, pp.241-258, 1967.
- 7) Hussain, A. K. M. F. & Reynolds, W. C.: The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, vol.41, pp.241-258, 1970.
- 8) Batchelor, G. K.: Homogeneous turbulence, Camb. Univ. Press, 1953, (巽友正(訳): 乱流理論, 吉岡書店, 1960)。
- 9) 井上栄一: 地表風の構造, 農業技術研究所報告, A-2号, 1952.
- 10) Nakagawa, H., Nezu, I. & Ueda, H.: Turbulence of open channel flow over smooth and rough beds, *Proc. of ASCE*, No.241, pp.155-168, 1975.
- 11) Tchen, C. M.: On the spectrum of energy in turbulent shear flow, *Jour. of R.N.B.S.*, vol.50, pp.51-62, 1953.
- 12) Hinze, J. O.: Turbulence, McGraw-Hill, pp.451-566, 1959.
- 13) von Karman, T.: Progress in the statistical theory of turbulence, *Proc. of N.A.S.*, vol.34, pp.530-539, 1948.
- 14) Monin, A. S. & Yaglom, A. M.: Statistical fluid mechanics, MIT Press, 1971.
- 15) Bradshaw, P.: Conditions for the existence of an inertial subrange in turbulent flow, *A.R.C.*, R. & M., No.3603, 1967.
- 16) Zagustin, A. & Zagustin, K.: Analytical solution for turbulent flow in pipes, *La Houille Blanche*, No.2, pp.113-118, 1969.
- 17) Townsend, A. A.: Equilibrium layers and wall turbulence, *J. Fluid Mech.*, vol.11, pp.97-120, 1961.
- 18) Kline, S. J. *et al.* (edi.): Computation of turbulent boundary layers 1968 AFOSR-IFP-Stanford Conf., vol.1, 1968.
- 19) Reichardt, H.: Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. *ZAMM*, Bd.31, pp.208-219, 1951.
- 20) Davies, P. O. A. L. & Yule, A. J.: Coherent structures in turbulence, *J. Fluid Mech.*, vol.69, pp.513-537, 1975.
- 21) Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. & Runstadler, P. W.: The structure of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, vol.30, pp.741-773, 1967.
- 22) Kim, H. T., Kline, S. J. & Reynolds, W. C.: The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol.50, pp.133-160, 1971.
- 23) Corino, E. R. & Brodkey, R. S.: A visual investigation of the wall region in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, vol.37, pp.1-30, 1969.
- 24) Grass, A. J.: Structural features of turbulent flow over smooth and rough boundaries, *J. Fluid Mech.*, vol.50, pp.233-255, 1971.
- 25) Brodkey, R. S., Wallace, J. M. & Eckelmann, H.: Some properties of truncated turbulence signals in bounded shear flows, *J. Fluid Mech.*, vol.63, pp.209-224, 1974.
- 26) Nakagawa, H. & Nezu, I.: Prediction of the contributions to the Reynolds stress from the bursting events in open channel flows, *J. Fluid Mech.*, vol.80, pp.99-128, 1977.
- 27) Frenkiel, F. N. & Klebanoff, P. S.: Probability distributions and correlations in a turbulent boundary layers, *Phys. of Fluids*, vol.16, pp.725-737, 1973.
- 28) Lu, S. S. & Willmarth, W. W.: Measurements of the structure of the Reynolds stress in a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol.60, pp.481-511, 1973.
- 29) Antonia, R. A. & Atkinson, J. D.: High-order moments of Reynolds shear stress fluctuations in a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol.58, pp.581-593, 1973.
- 30) 中川博次, 袴津家久: 開水路粗・滑面乱流のレイノルズ応力の構造について, 第30回土木学会年講, 11-194, 1975.
- 31) Erdélyi, A. (edi.): Tables of integral transforms, McGraw-Hill, vol.1, 1954.
- 32) 中川博次, 袴津家久: 開水路乱流場のレイノルズ応力の挙動, 第20回土木学会水理講演会論文集, pp.121-126, 1976.

第3章 乱れ計測器の諸特性に関する研究

第3・1節 緒 言

前章で考察したように乱流構造の理論的解明は現在でもごく一部に限られ、主に実験的研究に頼らざるを得ないのが実状である。このため、今日まで数多くの乱れ計測器が開発されて来たが、低周波部から有意な高周波部にまで及ぶ乱れ変動を忠実に計測・記録することは非常に困難であって完全な乱れ計測は望めない。したがって、対象とする乱れ現象の特性スケールを十分に把握して、その主要な乱れ特性を可能な限り検出できる計測器を選定しなければならない。

さて、乱れ計測法には大別して次の2つがある。

(A) 乱れの点計測法

- (1) 総圧管式流速計(差圧変換方式)
- (2) プロベラ流速計
- (3) 超音波流速計
- (4) 熱式流速計(熱線・熱膜流速計)
- (5) 光学式流速計(レーザ流速計)
- (6) その他(グロー放電式, パルス・ワイヤ式など)

(B) 流れ(乱れ)の可視化法

- (1) 水素気泡, 微細粒子, 染料等によるトレーサ法
- (2) 流体の物性値の局所的差異を利用した可視化法

(A)はEuler的の点計測法であって最も普通に使われる。実験に際しては、対象とする乱れの特性スケールを考慮して次の条件を満足する計測器を選ばねばならない。¹⁾

- (i) 計測器が流れを許容範囲内でしか乱さないこと。
- (ii) センサが乱れの最小スケールより小さく、点計測が可能なこと。
- (iii) 周波数応答性、追従性が良好であること。
- (iv) 計器が安定かつ丈夫で、再現性が良好であること。

いま、対象とする乱流場を室内実験の規模に限定すれば、(4)の熱式流速計が最も適切であるといえる。すなわち、総圧管式流速計では高周波成分が切断される上に、²⁾ 圧力変動の影響も加わり、³⁾ (iii)の条件を満足しがたい。

次に、プロベラ流速計は線形応答するためその取扱いは容易であるが、計器が比較的大きく、実河川向きであろう。⁴⁾ 超音波流速計は、プロベラ流速計より(ii)の条件が改善されているが、やはり計器が大きくて室内実験用には不適当である。⁵⁾ 一方、熱式流速計は上記の諸条件を比較的良好に満足し、特に(iii)の条件について優れており、現段階では室内実験での優れた乱れ計測器といえる。⁶⁾ 光学式流速計は乱流場の外からレーザ光線を入射させるから流れを乱す心配はなく、熱式流速計よりさらに優れているが、非常に高

価な上にノイズの混入や操作上に問題があり、まだ普及品とはいえない。⁷⁾ なお、(6)の電気・化学の諸原理を応用した他の方法は一般に安定性が悪く、特別な目的以外には使われない。⁸⁾

次に、(B)の流れの可視化法では、応答性や解析上の精度は低いが、瞬時に乱流場の流況が把握できるから、(A)の点計測では得難い別の情報が期待できる。(2)の可視化法(例えばSchlieren法)は一般に精度が悪く、流れの定性的な解明に限られるが、⁹⁾ トレーサ法は低流速の乱れの挙動をかなり定量的に解析することができる。Schraubら(1965)¹⁰⁾やDavisら(1967)¹¹⁾は従来の水素気泡法を一段と改良し、高速度カメラを併用して乱れの定量的評価への道を開いた。そして1960年代後半からの乱れ発生機構に関する実験的研究を促すこととなった。

以上を考慮して、本研究で扱う実験室規模の開水路流の計測には(A)の点計測法として熱膜流速計が、(B)の可視化法として水素気泡法が最も適当であると結論づけた。熱膜流速計は気流用の熱線流速計を水流用に改良したものであるが、後者に比べてその開発は浅く、1967年頃からわずかに1成分用プローブが実用の段階に入ったにすぎない。¹²⁾ そして、1970年代初頭にはX型の熱線に対応するV型の熱膜プローブが製作され、2方向流速変動成分が同時計測されるに至った。¹³⁾ 著者は逸早くこの2成分熱膜プローブを入手し、精度の高いデータを得るための使用法を開発して来た。¹⁴⁾

本章では、次章以下の実験的研究の基礎となる2成分熱膜流速計の諸特性を検討した結果を詳細に論じるとともに、水素気泡法に関しても簡単に述べることにする。

第3・2節 2成分熱膜流速計の特性

3・2・1 熱膜流速計の原理

熱膜流速計は、水流、油流、血液流などの電気伝導度の比較的大きい流体中でも安定した乱れ計測が可能のように熱線流速計を改良、補強したものであるが、両者の原理はまったく同じである。¹⁵⁾ すでに熱線流速計の原理に関する著書があるから、^{1), 6)} 熱膜の場合も適宜にこれを援用せよ。これらは、2成分熱膜流速計を取扱う上での基本となるから、以下簡単に論じることとする。

まず、流速計本体にはFig. 3・1に示すように、(a)定電流式と(b)定温度式とがある。¹⁶⁾ 前者では、乱れ変動に追従して熱膜の温度 T_f が変化するから熱遅延(thermal lag)がおき、熱補償器を手動で用いなければならない。¹⁾ 一方、

後者の定温度式では、いわば熱補償器を自動化したものであって、熱遅延の問題は解消し、そのフィード・バック回路が安定ならば当然定電流式より優れている。⁶⁾ 本実験でも定温度式を採用し、以下ではこの流速計のみを考察する。

さて、流速 U と流速計の出力電圧 E との関係式として、諸々の仮定に基づく King の理論解もあるが、実際には多くの経験式が使われ、ここではこれらの代表的なものとして次の Kramers の式を採用する。¹⁾ Fig. 3・2 に示すように直径 D 、長さ l の円柱型熱膜が主流に直角に置かれたとき、次の実験式が成立する。

$$N_u = 0.42 P_r^{0.2} + 0.57 P_r^{0.33} R_e^{0.5} \quad (3.1)$$

ここで、 $N_u \equiv hD/k$ 、 $R_e \equiv UD/\nu$ 、 $P_r \equiv C\rho\nu/k$ 、 h は熱伝達係数、 k は水の熱伝導率、 C はその比熱である。

いま、作動抵抗 R_s の熱膜に印加された電圧 E_{in} によって発生したジュール熱が水流へと放熱し、平衡状態に達すれば次式が得られる。

$$N_u = \frac{E_{in}^2/R_s}{J \cdot \pi l \cdot k (T_s - T_w)} \quad (3.2)$$

ここで、 T_s はセンサの温度、 T_w は水温、 J は熱変換率 (= 4.2 joule/cal) である。

上式と、 E が E_{in} に比例することから次式が得られる。

$$E^2 - E_o^2 = A' U^{0.5} \quad (3.3)$$

$$A' \equiv \text{Const.} \times k l (D/\nu)^{0.5} P_r^{0.33} R_s (T_s - T_w) \quad (3.4)$$

$$E_o^2 \equiv \text{Const.} \times k l P_r^{0.2} R_s (T_s - T_w) \quad (3.5)$$

R_s を固定すれば A' 及び E_o は水温 T_w の関数となり、しかも P_r 、 ν の水温変化は小さいから、ほぼ T_w に対して直線変化することがわかる。 E_o は $U=0$ すなわち静水中での出力電圧であり、自由放熱を、一方式 (3.3) の右辺は流速による強制放熱をそれぞれ表わしている。水温 T_w を一定に保てば、式 (3.3) なる流速・電圧の較正関数が得られる。

以上は円柱型熱膜に関するものであり、本実験で使用した楔型熱膜 (DISA 社製 55A83 型, Fig. 3・3 参照) では U の指数 n は厳密には 0.5 でなく、¹²⁾ しかも R_e の範囲によって若干変化すると報告されている。⁶⁾ したがって、以下では

$$E^2 - E_o^2 = A' \cdot U^n \quad (3.6)$$

を較正関数と考え、検定実験から必要な諸係数を決定する。

3・2・2 熱膜流速計の方向特性

本実験で使用した 2 成分熱膜プローブは Fig. 3・4 に示す DISA 社製の V 型であり、較正曲線を決定するに当りまずこの方向特性を知らねばならない。

さて、V 型プローブが主流に対して θ だけ傾斜したとき

の位置関係を Fig. 3・5 に示す。熱膜流速計の方向特性を表わす代表的な実験式は次の Hinze の式である。¹⁾

$$U_e^2 = U^2 (\cos^2 \phi + k^2 \sin^2 \phi) \quad (3.7)$$

ここで、 U_e は熱線が感知する有効速度、 k は冷却係数であって、Hinze によれば $k=0.1 \sim 0.3$ である。Champagne ら (1967) も式 (3.7) の妥当性を確かめた。¹³⁾ すなわち、 $l/D=200$ で $k \approx 0.2$ であるが、 l/D の増加と共に k は減少し、 $l/D=600$ ではほぼ零となってその副次効果は消滅することを実験的に示した。以下では熱膜の場合にも式 (3.7) が成立するとして考察を進める。

Fig. 3・5 に示したように、下側を第 1 センサ、上側を第 2 センサと区別して添字を付ければ、

$$\phi_1 = \pi/2 - (\varphi_1 + \theta), \quad \phi_2 = \pi/2 - (\varphi_2 - \theta) \quad (3.8)$$

$\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/4$ であり、式 (3.6) 及び (3.7) から $\theta=0$ を基準にとれば次式を得る。

$$\frac{(E^2 - E_o^2)}{(E^2 - E_o^2)_{\theta=0}} = \left(2 \cdot \frac{\cos^2 \phi + k^2 \sin^2 \phi}{1 + k^2} \right)^{n/2} \quad (3.9)$$

両センサを区別して添字で表わせば、

$$\psi_i(\theta) \equiv \left[\frac{(E_i^2 - E_{io}^2)}{(E_i^2 - E_{io}^2)_{\theta=0}} \right]^{2/n_i} \quad (i=1, 2) \quad (3.10)$$

$$\text{とおいて、} \quad \psi_i(\theta) = \frac{2(\cos^2 \phi_i + k_i^2 \sin^2 \phi_i)}{1 + k_i^2} \quad (3.11)$$

$$\text{また、} \quad k_i^2 = \frac{2 \cos^2 \phi_i - \psi_i}{\psi_i - 2 \sin^2 \phi_i} \quad (3.12)$$

以上の議論の妥当性を検討する目的で、一様開水路乱流場の一測点 ($U=34.3 \text{ cm/s}$, $u/U=0.04$) で方向特性の検定実験を行った。主流に直交な軸のまわりに回転できるプローブ支持装置を用いて時計回り (θ を正とする) 及び反時計回りに 5 度ずつ回転させて、その出力電圧の変化を調べた。なお、プローブを回転させてもセンサ部が常に同一測点に来るように支持台を調節した。

Fig. 3・6 には、 $\psi(\theta)$ の実験値及び $k=0.0$ 、及び 0.3 とした式 (3.11) の計算曲線を示した。 $|\theta|$ が小さいときは、実験値は $k=0$ の式 (3.11) と非常によく一致し、ほぼ余弦則が満足されている。しかし、 $|\theta|$ が大きくなると余弦則から系統的な差異が生じ、この副次効果を無視できなくなる。 θ が正より負のときの差異が若干大きい。これはプローブ自体による攪乱の影響と考えられる。Fig. 3・7 は式 (3.12) から求めた係数 k^2 の実験値である。 $|\theta|$ が小さいとき式 (3.12) の分母が零に近く、計算上の誤差が入り易いが、

ほぼHinzeの範囲にあり、式(3.7)が満足されている。 k は角度 θ に無関係であるから¹⁸⁾その平均をとると $k_1=0.12$, $k_2=0.21$ となってChampagneらの値と同程度になる。また、本実験とはほぼ同じ頃、Resch(1973)はDISA社の委託を受け、同種のプローブ(55A89型)の方向特性実験を行い、実験値と式(3.7)との平均二乗誤差を最小にする k の値を求めて、 $k_1=0.023$, $k_2=0.035$ を得た¹⁹⁾。 k の値の決定方法の違いにもよるが、Reschの結果は小さい。

以上から、熱膜の方向特性の副次効果はかなり小さく、5%以内の誤差で余弦則が成立すると考えてよい。

さて、Fig.3.5のプローブ軸 pp' を x 軸に、センサ面内上向きを y 軸にそれぞれとり、瞬間流速を $\vec{u}=(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ とする。このとき、各センサの方向余弦は $\vec{l}_1=(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$, $\vec{l}_2=(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ であるから、式(3.7)の余弦則より次式を得る。

$$\tilde{U}_{ei}^2 = (\vec{u} \cdot \vec{l}_i) - (\vec{u} \cdot \vec{l}_i)^2 \quad (i=1, 2) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち, } \tilde{U}_{e1}^2 &= \frac{(\tilde{u} + \tilde{v})^2}{2} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{\tilde{w}}{\tilde{u} + \tilde{v}} \right)^2 \right\} \\ \tilde{U}_{e2}^2 &= \frac{(\tilde{u} - \tilde{v})^2}{2} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{\tilde{w}}{\tilde{u} - \tilde{v}} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

本実験で対象とする2次元乱流場では、

$$\tilde{u} \gg \tilde{v}, \tilde{w} \quad (3.15)$$

であるから、次のように近似できる。

$$\tilde{u} = (\tilde{U}_{e1} + \tilde{U}_{e2})/\sqrt{2}, \quad \tilde{v} = (\tilde{U}_{e1} - \tilde{U}_{e2})/\sqrt{2} \quad (3.16)$$

$$\text{ここで, } \tilde{E}_i^2 - E_{io}^2 = A_i^2 \tilde{U}_{ei}^2 \quad (i=1, 2) \quad (3.17)$$

式(3.16)及び(3.17)が2成分熱膜流速計の校正関数であって、各センサの校正係数 A_i^2 及び n_i は検定実験から求められねばならない。

3.2.3 2成分熱膜流速計の検定実験

まず、両センサのカップリングを防ぐために、各熱膜間の温度差を最小にするように作動抵抗を決定せねばならない。この目的で、各センサ抵抗の温度特性を調べた。任意の水温中に熱膜プローブを入れ、Wheat-Stone橋を使ってこのセンサ抵抗を測定したが、Fig.3.8にその結果が示される。両センサ抵抗の温度特性は直線変化し、第1及び第2センサの温度係数はそれぞれ0.0026(1/°C)及び0.0027(1/°C)となり、本熱膜(ニッケル材質)の公称温度係数

0.0025(1/°C)とよく一致する。次に、熱膜の応答性や安全性を考慮して両センサの温度がほぼ40°CになるようにFig.3.8から可変抵抗値を逆算し、設定した。しかし、実際に設定した外部抵抗は $T_{s1}=35.6^\circ\text{C}$, $T_{s2}=38.3^\circ\text{C}$ に相当するものであった。

このように設定された流速計を用いて、まず静水中での出力実験を行い、その結果がFig.3.9に示される。異なる実験日でもその再現性はきわめて良く、次の実験式が得られた。

$$E_{10}^2 = 0.212(33.40 - T_w), \quad E_{20}^2 = 0.178(37.42 - T_w) \quad (3.18)$$

式(3.18)は式(3.5)と良好に一致するが、 T_s が両者で若干異なっている。これは、 P_r 及び ν の温度変化やプローブ・リード線などの影響によるものと考えられる。以下では、式(3.18)が静水中の出力電圧関係式として採用された。

次に、乱れ強度を最小に抑えて一様開水路乱流場で2成分熱膜流速計の検定実験を行った。Hinzeも指摘しているように¹⁾式(3.16)及び(3.17)は平均量に関しても成立するから、 $\tilde{u}=U$, $\tilde{v}=V \approx 0$ を考慮して

$$\begin{aligned} E_i^2 - E_{io}^2 &= A_i^2 (U/\sqrt{2})^{n_i} \equiv A_i U^{n_i} \\ A_i &= A_i^2/2^{n_i/2}, \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

式(3.4)から校正係数の温度変化は大きいと考えられるから、検定実験に際し、水温が平衡状態に達し一定であることを確認したのち、 $U < 30 \text{ cm/s}$ では浮子を、 $U \geq 20 \text{ cm/s}$ では標準型ピトー管をそれぞれ使って検定した。出力電圧の平均値は $A \cdot D$ 変換後求められた。

Fig.3.10(a)及び(b)はそれぞれ第1及び第2センサの校正曲線の代表例である。 $T_w = 19.08^\circ\text{C}$ のものは詳細な検定実験の結果であり、他は実際の乱れ計測に際して行われたものである。実験値は式(3.19)と良好に一致している。 n_i は水温と無関係な定数であるが、速度 U の範囲によって若干変化する。すなわち、第1センサを例にとると、 $U < 30 \text{ cm/s}$ の低速度では $n = 0.515$, $20 < U < 100 \text{ cm/s}$ の中速度では $n = 0.465$, また $U > 100 \text{ cm/s}$ の高速度では²⁰⁾ $n = 0.428$ が得られた。このように高速度ほど n が漸減する傾向をBradshaw(1971)も熱線で示している。²¹⁾これらの値はKing則の $n = 0.5$ にかなり近いが、精度よい乱れ計測を望むならば対象とする平均流速の範囲を考慮して n 値を決定せねばならない。次に、Fig.3.10の切片定数から求まる A_i の値は水温によって系統的に変化している。Fig.3.11は過去3年間にわたって集積された校正係数 A_i の実験値を示したが、 T_w に対してほぼ次式で与えられる直線変化を示すことが認められた。

$$A_1 = 0.138(32.07 - T_w), \quad A_2 = 0.122(35.72 - T_w)$$

$$\dots\dots\dots (3\cdot20)$$

E_0^2 と同様、式(3・20)は式(3・4)と良好に一致し、熱線での知見が熱膜にも十分適用されることがわかる。

以上の式(3・18)、(3・19)及び(3・20)から較正曲線が決定できる。Fig.3・12は第1センサの較正曲線を例示したものである。速度－電圧は明らかに非線形応答(ほぼ4次関数応答)であるが、デジタル演算法を採用すればリニアライザーを用いずとも式(3・19)のプログラミングから容易に出力電圧を流速値に変換できる。

第3・3節 熱膜流速計に及ぼす諸因子の影響

乱れ計測器として熱膜流速計を採用するとき、その応答性が優れているだけにかえて諸因子の好ましくない影響を受けやすく、細心の注意を払わなければ精度よいデータは期待できない。熱膜流速計の精度に及ぼす諸因子の影響の度を熱線の場合と対比して要約したのが次の表である。²⁰⁾

No	要 因	熱線流速計	熱 膜 流 速 計	
			1 成分 用	2 成分 用
(1)	ノイズ等が混入する。	影響あり	影響あり	影響あり
(2)	流体の温度が変化する。	影響あり	影響あり	影響あり
(3)	流体中に不純物が混在している。	気流中の不純物は無視できる	影響あり	影響特に大
(4)	流体がプローブの絶縁を悪くする。	影響なし	影響あり	影響特に大
(5)	センサに沿って流速分布が非一様である。	影響あり	影響あり	影響特に大
(6)	流向が傾斜する。	3成分用熱線を使用すればよい	影響あり	$\tilde{u} \gg \tilde{w}$ であれば影響は無視される

これまでの経験を基礎として各項目ごとに以下簡単に考察する。

3・3・1 ノイズ混入の影響

電氣的計測器は多少ともノイズ等を伴うから、 $N \cdot S$ 比を最小限に抑えなければならない。Fig.3・13は本実験で採用したデータ処理システムであり、流速計の出力電圧が数値化されて磁気テープにファイルされるまでにノイズやド

リフト等が混入するおそれがある。

さて、出力電圧 E は流速 U と水温 T_w の関数であるから、 U と T_w とが微小変化したとき次式を得る。

$$\Delta E = (\partial E / \partial U) \Delta U + (\partial E / \partial T_w) \Delta T_w \dots\dots\dots (3\cdot21)$$

いま、水温を一定に保てば、式(3・19)から

$$\frac{\Delta U}{U} = C_i \cdot \frac{\Delta E_i}{E_i}, \quad C_i \equiv \frac{2}{n_i(1 - E_{i0}^2/E_i^2)}, \quad (i=1, 2) \dots\dots\dots (3\cdot22)$$

C_i は感度係数であり、 ΔE_i が乱れ信号ならば速度変動 ΔU を与える倍率に相当する。 ΔE_i がノイズならば $\Delta E_i/E_i$ は $N \cdot S$ 比であり、式(3・22)が速度に及ぼすノイズの影響となる。

Fig.3・14は第1センサの感度係数 C を例示したものであるが、第2センサもこれとほぼ一致した。水温が高く、速度が小さいほど C は大きくなり、計器類の $N \cdot S$ 比が同一でも速度に及ぼす $N \cdot S$ 比の影響はそれだけ大きく、データの精度は悪くなる。本研究で対象とする流速範囲内でかつ室温では C の変動幅はかなり小さく、ほぼ $\Delta U/U = (5 \sim 7) \Delta E/E$ となる。すなわち、計器類に1%の $N \cdot S$ 比があっても流速値は(5~7)%もの大きなノイズの影響を受ける。

このようなノイズやドリフトの影響を最小限にするために次の点に留意した。

(Ⅰ)出力電圧にバイアスを印加してアテネータなしで記録し、さらにローパス・フィルターで不要の高周波ノイズ成分を除去した。

(Ⅱ)使用直前に計器系が電氣的に十分安定であることを確認し、また測点ごとに零点調整を十分行いドリフトの影響を取り除いた。

(Ⅲ)アース等を十分に行い、また外部からのノイズや振動が比較的小さい日曜・祭日を実験日に当てた。

3・3・2 水温変化の影響

一測点での乱れ計測の所要時間は約2分程度であるから、水温がほぼ平衡状態にあれば、一測点計測中の水温変化は無視できる。しかし、測点が多数あれば全計測に長時間要し、この間に水循環系の摩擦熱によって水温は微増する。したがって、全測点に同一の較正曲線を適用することは危険である。いま、速度 U を一定にすれば、式(3・19)、(3・21)から次式を得る。

$$\frac{\Delta E_i}{E_i} = \frac{\Delta T_w}{2(A_i U n_i + E_{i0}^2)} \left(\frac{\partial E_{i0}^2}{\partial T_w} + U n_i \frac{\partial A_i}{\partial T_w} \right) \dots\dots\dots (3\cdot23)$$

水温変化(ΔT_w)に伴い出力電圧は変化するが、同一の較正曲線を使えばあたかも速度が変化したように評価してしまう。すなわち、式(3・22)から

$$\frac{dU/U}{dT_w} = \frac{1}{n_c A_t U^{n_c}} \left(\frac{\partial E_{\tau o}^2}{\partial T_w} + U^{n_c} \frac{\partial A_t}{\partial T_w} \right) \quad (3.24)$$

となり、式(3.18)及び(3.19)を使って ΔT_w 当りの見かけ上の速度変化 $\Delta U/U$ を評価できる。この計算結果を Fig. 3・15 に図示するが、水温が高く、速度が小さいほど水温変化の影響は大きいといえる。これは、熱膜からの放熱量が減少し、 $N \cdot S$ 比が悪化するためと考えられる。実際、水温変化の影響を考慮しなければ、 $\Delta T_w = 1^\circ\text{C}$ の水温上昇当り 2 割弱も流速を過小評価してしまう。

ところで、式(3.17)を微小変化すれば次式が得られる。

$$\frac{dU}{U} = \frac{1}{2} \left(C_1 \frac{dE_1}{E_1} + C_2 \frac{dE_2}{E_2} \right), \quad \frac{dV}{U} = \frac{1}{2} \left(C_1 \frac{dE_1}{E_1} - C_2 \frac{dE_2}{E_2} \right) \quad (3.25)$$

Fig. 3・14 から感度係数 C_1 , C_2 の水温に対する変化は小さく、 dU/U や dV/U は近似的に水温と無関係となる。したがって、乱れ強度が小さく、乱れ変動成分 (u , v) を微小変化量 (ΔU , ΔV) と見なすことができれば、平均流速 U を知って式(3.25)から乱れ変動成分 (u , v) が水温とはほぼ無関係に評価できよう。しかし、精度高いデータを必要とする本研究では、水温変化を可能な限り抑える目的で実験開始の約一昼夜前から水流を循環させて水温を安定させた。その結果、実験終了時でも水温変化を約 0.5°C 以下に抑え得たが、さらに各計測時の水温に対して校正係数を補正し、水温変化の影響を取り除いた。

3・3・3 水流中の不純物の影響

一般に水流中には微細なゴミや鉄さび等が浮遊しており、計測中にこれらの不純物がセンサに付着すると、当然熱放散は鈍化し、出力電圧は低下するから流速を過小に評価してしまう。1成分熱膜の円錐型プローブでは不純物の付着が最も少ないと報告されているが、²²⁾ 壁面近傍の計測には不向きである。また、2成分熱膜では不純物の付着を最少にするプローブ形状は現在でも未開発である。

センサへの不純物の付着が平衡状態にあれば、1成分熱膜では感度係数 C を適宜修正して不純物混在の水流でも乱れ計測が可能であることを Richardson ら (1968) は実験的に示したが、¹²⁾ 周波数応答性が非常に悪くなるから特別な場合を除いて避けるべきである。⁹⁾ 特に、2成分熱膜では不純物の付着のむらにより C_2 の変化が両センサで一般に相違し、正確な校正曲線を得ることは困難である。したがって不純物を可能な限り除去する必要があるが、本実験では実験開始前に水路系を十分に掃除して清水流を得ると共に、前日からの水循環に際し微細な浮遊物をガーゼで除去した。さらに、計測直前にセンサ部を十分に洗浄し、また計測中の出力電圧をペンレコーダ及びオシロスコープでモニタ

し、不純物の付着による電圧降下がないことを確認して磁気テープに記録した。

3・3・4 流速分布の非一様性の影響

ここで用いる熱膜センサの長さ l は 1mm であり、乱れの最小スケールがこれ以下ならば点計測はできず、流速分布の非一様性の影響が現われよう。Hinze の著書によれば、Skramstad らは y 方向の相関関数 $R_y(r)$ を放物線で近似し、等方性乱流を仮定して 1 成分熱膜センサに関して次式を導いた。¹⁾

$$\begin{aligned} \overline{u_m^2} &= \frac{2 \overline{u_t^2}}{l^2} \int_0^l R_y(r) (l-r) dr \\ &\approx \overline{u_t^2} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \left(l/\lambda_y \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

ここで、添字 m 及び t はそれぞれ計測値及び真値を表わし、 λ_y は y 方向のマイクロ・スケールである。この近似方法を 2 成分熱膜センサに拡張すれば、 x 方向のマイクロ・スケール λ_x も導入して Fig. 3・5 と式(3.16)から次式が得られる。

$$\begin{aligned} \overline{u_m^2} &= \left(1 - \frac{1}{3} \left(l/\lambda_y \right)^2 \right) \overline{u_t^2} + \frac{1}{4} \left(l/\lambda_x \right)^2 \overline{v_t^2} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} l \frac{d}{dy} \overline{(uv)}_t \\ \overline{v_m^2} &= \frac{1}{4} \left(l/\lambda_x \right)^2 \overline{u_t^2} + \left(1 - \frac{1}{3} \left(l/\lambda_y \right)^2 \right) \overline{v_t^2} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} l \frac{d}{dy} \overline{(uv)}_t \\ \overline{(uv)}_m &= \overline{(uv)}_t - \frac{1}{2\sqrt{2}} l \left\{ \left(1 - \frac{1}{12} \left(l/\lambda_y \right)^2 \right) \frac{d}{dy} \overline{u_t^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{1}{12} \left(l/\lambda_x \right)^2 \right) \frac{d}{dy} \overline{v_t^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

1 成分熱膜では式(3.27)の l は $l \sin \varphi = l/\sqrt{2}$ に対応するから、式(3.27)は式(3.26)に一致する。 $l \ll \lambda_x$, λ_y でも 2 成分熱膜からの計測値には速度変動の y 方向勾配の影響が現われ、1 成分熱膜よりはるかに複雑となるが、第 2・2 節より $|du_t^2/dy| \sim |dv_t^2/dy| \sim |d(uv)_t/dy| = U_*^2/h$ であるから、例えば $h = 8\text{cm}$, $l = 1\text{mm}$ ではこの影響は約 1% 以下の誤差となり、水深が極端に浅くない限り流速勾配の影響は無視できると考えられる。

なお、Wyngaard (1968) は高波数スペクトルに及ぼす X 型熱線センサの有限長による影響を検討しており、²³⁾ この結果を V 型熱膜にも拡張できると考えられるが、ここでは割愛する。

3・3・5 その他の影響

ここで使われる熱膜プローブのコネクターは水流に当たるから、そこから水滴が浸入し、リード線同志の絶縁を不

良にして出力電圧が不安定となる危険がある。これは気流実験では経験しないトラブルの一つであり、特に2成分熱膜では絶縁状態が少しでも悪化すると両センサ間で電気的なカップリング現象が起き、応答性が非常に不安定となる。このため、水滴の浸入する危険箇所はシリコングリスやラッカパテで十分に被覆・絶縁され、乱れ計測の前後では静水中の出力電圧 E_0 を測り(絶縁不良のとき E_0 は増加する)計測中の絶縁が良好であることを確認した。

次に、流向が顕著に傾斜しておれば、1成分熱膜によって得られる u 変動成分にはその影響が無視できない。流向が傾斜していても2次元乱流場では2成分熱膜を用いれば問題はないが、跳水乱流場のような逆流域を伴う流れ²⁰⁾や往復流¹⁶⁾では順流と逆流との境界付近で式(3・15)は満足されず、2成分熱膜でさえ計測できない。

その他、熱膜流速計に及ぼす影響として (1)プローブ自体が惹起する擾乱 (2)実験水路系の自励振動 (3)電源や電池の消耗等が考えられるが、適宜にこれらの影響は除去された。

第3・4節 水素気泡列による乱れの可視化法

熱膜流速計による多点同時計測には技術的に限界があり、広範囲の瞬間流速分布を得ることは困難である。一方、乱れの発生機構や渦の形成過程を解明する際にこの瞬間流速分布に関する情報は不可欠であるから、高精度の定量的計測は無理としても、乱れの可視化はこれらの情報を提供する一つの有効な手段となろう。水素気泡法はその原理が容易なことだからかなり以前から使われていたが、これを定量評価できるまでに改良したのがklineら(1965)のグループであり⁹⁾乱れの発生機構の解明に有力な計器であることが示された^{24) 25)}

以上を考慮して、本研究では熱膜流速計による点計測データを補完する目的で水素気泡による乱れの可視化を試みたが(第5・6節)、以下この解析法に関する若干の考察を行う。

3・4・1 水素気泡法の原理とその解析方法

Fig.3・16に示すように、陽極に銅板、陰極に白金線を用いて水流中に挿入し、通電すれば、水の電気分解が起こって白金線から水素気泡が発生する。水素気泡はほとんど慣性なしにある流下距離まで流れに追従するから、この気泡をトレーサとして可視化すればその流況が把握される。水の電気分解を制御する、すなわち所定の周期をもつパルス電圧を印加すれば同周期の水素気泡列が得られるから、これを高速度カメラで連続撮影すれば瞬時の流速プロファイルを得ることができる。流速が速いと気泡列の乱れが大きく、解析が困難となる。従来の実験によれば約30 cm/sが解析可

能な上限であり⁹⁾、本実験では最高約20 cm/sの乱流場中使用された。パルス電圧発生装置は計測技研社製であり、流況に応じてパルス周波数やパルス幅を決定した。陰極に用いた白金線は0.05と0.1 mm径であり、約2 mm間隔にラッカで絶縁されたから格子状の気泡列が発生した。

Fig.3・17はデータ処理システムである。撮影された16 mmあるいは35 mm連続フィルムは1コマごとに投射され、デジタル座標読取器で気泡列の座標が0.1 mmまで読み取られ、カードパンチされたのち電算機で以下のように処理された。Fig.3・18(a)は、ある瞬間での一コマ写真の模式図である。白金線による後流の影響や気泡に働く浮力の影響に関する従来の研究によれば、白金線径の40～250倍下流に計測断面 x_r をとればこれらの誤差を最小に抑えることができるから⁹⁾本実験では径の100倍下流に x_r を選んだ。図に示すように計測断面を挟む気泡列に番号を付け、同一地点(i -地点)から発生した3つの気泡に注目してこれらの座標(x_j, y_j), ($j=1, 2, 3$)を読み取る。各中点を d および e とし、その座標を(x_d, y_d), 流速を(u_d, v_d)などとすれば、差分近似から

$$\begin{aligned} u_d &= \frac{(x_2 - x_1)}{\Delta T}, & v_d &= \frac{(y_2 - y_1)}{\Delta T}, \\ u_e &= \frac{(x_3 - x_2)}{\Delta T}, & v_e &= \frac{(y_3 - y_2)}{\Delta T} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3\cdot28)$$

ここで、 ΔT はパルス周期である。次に、 $d-e$ 間で比例配分して計測断面上の y 座標 $y(z)$ 及び速度($\tilde{u}(z), \tilde{v}(z)$)が決定される。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} y(z) &= \frac{1}{S} \{ y_d + \alpha(y_e - y_d) \} \\ \tilde{u}(z) &= \frac{1}{S} \{ u_d + \alpha(u_e - u_d) \} \\ \tilde{v}(z) &= \frac{1}{S} \{ v_d + \alpha(v_e - v_d) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3\cdot29)$$

ここで、 $\alpha \equiv (x_r - x_d)/(x_e - x_d)$, S は写真の倍率である。もし、 $d-e$ 間に計測断面が来ないときは隣接の値で近似して、外挿による危険を避ける。

次に、コマ番号を j , コマ総数を N とすれば、 $y_a(z) = \sum_{j=1}^N y(z, j)/N$ から i -気泡の平均位置が求まり、さらにFig.3・18(b)のように y 方向に関して比例配分を行うと、($x_r, y_a(z)$)地点での瞬間流速($\tilde{u}(z, j), \tilde{v}(z, j)$)が決定される。したがって、撮影のコマ速度を一定にすれば各 j 瞬間ごとの流速プロファイルが得られる。

3・4・2 水素気泡法に及ぼす諸因子の影響とその適用限界

水素気泡はあくまでトレーサであるから流れに追従しな

くなれば適用できず、その測定精度に影響する因子としては次のものが考えられる。²⁵⁾

(i) 気泡の高周波応答性、追従性の欠除

写真技術上の限界からあまり小さな気泡を発生できず、このため小さな渦への追従性すなわち高周波応答性に欠ける。その上、座標読取の莫大な労力には限界があり、撮影コマ速度をむやみに大きくすることはできない。したがって、大きな渦すなわち低周波変動の挙動を解析するのに用いるべきであり、この点でも乱れの発生機構の解明に適している。

(ii) 浮力や後流の影響

浮力による上昇速度 v_b は、気泡の大きさが白金線の直径 D と同程度ならば Stokes の解を近似的に適用して次式で評価される。⁹⁾

$$v_b = \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{\rho_{H_2O} - \rho_{H_2}}{\rho_{H_2O}} \right) g D^2 \approx \frac{g D^2}{18 \nu} \quad (3.30)$$

$D = 0.1 \text{ mm}$ で $v_b = 0.5 \text{ cm/s}$ となり、特に流れが微流速のとき気泡同志が接触・合体する危険があり、この影響を無視できない。実験に際してはパルス周期とその幅を調節してこの影響を最小にし、また $V = \bar{v}$ が零になるように修正する。また、先述のように計測断面を $x_r = 100D$ と選んだから後流の影響はほとんど無視しうものと考えられる。²⁶⁾

(iii) 読取り誤差の影響

この誤差は座標読取りに伴う偶然誤差であるから、平均流速の算定には問題とならないが、乱れ強度の評価には非常に問題となる。すなわち、真値を r_j 、読取り誤差を r'_j と表わし、算定された流速値を $\hat{u}(j)$ とすれば、 $\hat{u}(j) = (r_j + r'_j) / (S \cdot \Delta T)$ であり、コマ総数 N が十分大きければ、 $r'_j \equiv 0$ すなわち $\bar{u} = U$ となる。一方、

$$\frac{\bar{u}'^2}{\bar{u}^2} = \sqrt{\left(\frac{u'}{U} \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{r'_j}{r} \right)^2} \quad (3.31)$$

投射図上の平均変位距離 r が 1 cm 程度、誤差 r' が 1 mm では $(u'/U)^2 \approx 0.01$ と同程度となってしまう。したがって、倍率 S を最大限に取って読取りの相対誤差を最小にするために、気泡列をコントラストよく撮影せねばならず、透明水でしかもスリット状の高強度の光源が必要である。

(iv) その他の影響

式(3.29)などの内挿法に伴う誤差、カメラの光収差やフィルム板の収縮誤差、気泡径の非一様性による誤差、横断方向への偏差による誤差などが水素気泡法に悪影響を及ぼすと考えられる。

第3・5節 結 言

本章は、次章以下で行われる開水路流の乱流構造に関する実験的研究に先駆けて、乱れ計測方法及びその解析手法を確立し、整理したものであり、本実験で点計測法として採用される2成分熱膜流速計及び可視化法として採用される水素気泡法に関して著者のこれまでの経験から考察したものである。

まず、熱膜流速計の一般的特性が既知であっても計測の環境によって諸々の好ましくない因子が混入する危険性があるから、その使用にあたってはそのつど検定実験が不可欠であり、乱れ計測の精度の良し悪しはこの検定実験にかかっているといえる。本研究では、各実験ケースの前後2回で詳細な検定実験を行い、既存の結果と比較検討して妥当なときは、計測時点の水温で校正曲線係数を修正し、各測点での校正曲線が用意された。次に、点計測法では入手できない乱れに関する新たな情報を得る目的で水素気泡法が使われた。この可視化法には諸々の誤差が伴い、かつ定量的評価には多大な労力を要するから点計測データを直接に補完する段階までには達しないが、複雑な乱れ発生機構すなわち bursting 現象を定性的に観測するには最適であり、第5・6節ではこの水素気泡法を用いて bursting 現象の挙動が観測される。

このように、開水路乱流に関する高精度のデータを得るためにはさらに高度の計測技術の開発が必要であろうが、本章で確立された点計測法及び可視化法からこの乱流構造に関する実験的研究が十分に可能であると考えられ、次章以下で詳細に検討される。

第3章 参考文献

- 1) Hinze, J. O.: Turbulence, McGraw-Hill, pp.73-141, 1959.
- 2) Ippen, A. T. & Raichlen, F.: Turbulence in civil engineering - Measurements in free surface stream, Proc. of ASCE, HY-5, pp.1-27, 1957.
- 3) 中川博次, 祢津家久: 管路内跳水に関する実験的考察 第16回土木学会水理講演会論文集, pp.43-48, 1972.
- 4) Iwasa, Y. & Imamoto, H.: Turbulence measurement by means of small current meter in free surface flow, Proc. of 12-th Congr. IAHR, B-32, 1967.
- 5) 余越正一郎: 河川乱流に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1970.
- 6) Bradshaw, P.: An introduction to turbulence and its measurement, Pergamon Press, pp.85-133, 1971.
- 7) Durst, F. & Whitelaw, J. H.: Optimization of optical anemometers, Proc. Roy. Soc., A-324,

- pp.157-181, 1971.
- 8) Clayton, B. R. & Massey, B. S. : Flow visualization in water, *J. Sci. Instrum.*, vol.44, pp.2-11, 1967.
 - 9) Schraub, F. A., Kline, S. J., Henry, J., Runstadler, P. W. & Littell, A. : Use of hydrogen bubbles for quantitative determination of time-dependent velocity fields in low-speed water flows, *Trans. of ASME, BE*, pp.429-444, 1965.
 - 10) Davis, W. & Fox, R. W. : An evaluation of the hydrogen bubble technique for the quantitative determination of field velocities within clear tubes, *Trans. of ASME, BE*, pp.771-778, 1967.
 - 11) Raichlen, F. : Some turbulence measurements in water, *Proc. of ASCE, EM-2*, pp.73-97, 1967.
 - 12) Richardson, E. V. & McQuivey, R. S. : Measurement of turbulence in water, *Proc. of ASCE, HY-2*, pp.411-430, 1968.
 - 13) DISA : Probe Manual, DISA Elektronik, Denmark, 1970.
 - 14) 中川博次, 祢津家久, 上田寛 : 2成分熱膜流速計による管路流の乱れ計測について, 土木学会関西支部年講, Ⅱ-17, 1973.
 - 15) Bellhouse, B. J. & Bellhouse, F. H. : Thin-film gauges for the measurement of velocity or skin friction in air, water or blood, *J. Sci. Instrum.*, vol.1, pp.1211-1213, 1968.
 - 16) Kolpak, M. M. & Eagleson, P. S. : The utility of a hot-film sensor and a direction-vane in the laboratory measurement of velocity fields in water waves, *MIT Hydro. Labo.*, Report 118, 1969.
 - 17) 中川博次, 祢津家久, 上田寛 : 管路内跳水の内部機構に関する研究(第2報), 第27回土木学会年講, Ⅱ-100, 1972,
 - 18) Champagne, F. H., Sleicher, C. A. & Wehrmann, O. H. : Turbulence measurements with inclined hot-wires, *J. Fluid Mech.*, vol.28, pp.153-175, 1967.
 - 19) Resch, F. J. : Use of the dual-sensor hot-film probe in water flow, *DISA-Information*, No.14, pp.5-10, 1973.
 - 20) 祢津家久 : 管路内跳水の乱れ特性に関する研究, 京都大学修士論文, 1973.
 - 21) Bradshaw, P. : An introduction to turbulence and its measurement, Pergamon Press, pp.170-175, 1971.
 - 22) Resch, F. J. : Hot-film turbulence measurements in water, *Proc. of ASCE, HY-3*, pp.787-800, 1970.
 - 23) Wyngaard, J. C. : Measurement of small-scale turbulence structure with hot wires, *J. Sci. Instrum.*, vol.1, pp.1105-1108, 1968.
 - 24) Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. & Runstadler, P. W. : The structure of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, vol.30, pp.741-773, 1967.
 - 25) 中川博次, 祢津家久, 為沢長雄 : 水素気泡トレーサによる乱れ計測について, 土木学会関西支部年講, Ⅱ-8, 1974.
 - 26) Grass, A. J. : Structural features of turbulent flow over smooth and rough boundaries, *J. Fluid Mech.*, vol.50, pp.233-255, 1971.

第4章 不浸透床上の開水路乱流の乱れ構造に関する実験的研究

第4・1節 緒 言

熱膜流速計の開発以来乱れ計測技術及び解析手法が飛躍的に向上した結果、開水路乱流の実験的研究が本格的に開始され、Raichlen (1967)¹⁾、McQuiveyら (1968)²⁾、石井ら (1971)³⁾、Blincoら (1971)⁴⁾、今本 (1972)⁵⁾ などによって先駆的な研究が行われた。しかし、これらの研究成果は滑面境界層流や管路流から得られた多くの知見に比べれば、なお不十分なものであり、第1章で指摘したように開水路乱流に及ぼす自由水面や壁面粗度等の影響を系統的に検討することが不可欠かつ急務と考えられる。

以上の点に鑑み、著者はここ数年来 Reynolds 数、Froude 数及び壁面粗度が開水路の乱流構造に及ぼす影響を及ぼすかを2成分熱膜流速計を駆使して実験的に解明しようと試みて来た^{6),7),8)}

ところで、Townsend (1961) 以来の乱流研究では⁹⁾ 乱れ特性値は平均流特性値より他の乱れ特性値と強い相関をもつ、すなわち乱れはそれ自身の間で丸く収まっているという“self-consistency”が注目され、この特性を使って例えば乱れと平均流とを直接結びつける混合距離理論等より一段と進歩したモデルが開発されて来た¹⁰⁾

本章では、まず上述の乱れの self-consistency に立脚して、 u 、 v 及び w 3成分の乱れ強度や Reynolds 応力など乱れ特性基本量に及ぼす Reynolds 数 R_e 、Froude 数 F_r 及び壁面粗度 k_s の影響を詳細に検討する。次に、第2章で展開されたスペクトル解析手法の妥当性を検証すると共に、特性渦スケール間の関係を明白にし、乱れエネルギーの逸散率を評価する。最後に、乱れエネルギーの発生率及び拡散率を評価してこれらのエネルギー収支を解明し、次章の乱れ発生機構の解明にあたっての基礎的知見を与えようとするものである。

第4・2節 実験装置及びデータ解析方法

4・2・1 実験装置及び水理条件

実験は、Fig. 4・1に示す幅 50 cm、深さ 30 cm、長さ 15 m の鋼製枠組の亚克力製勾配可変型直線水路で行われた。水路勾配はジャッキで微調節され、等流状態が得られるようにした。大きなスケールの攪乱を抑える目的で水路入口に整流板及び 1 mm 間隔の網目板を設置し、また網目板の前にはガーゼを張って水流中の不純物質を除去した。これらの装置によって、水路上流端から 9.5 m 下流の計測断

面では十分に発達した乱流が得られた。滑面は亚克力板のペンキ塗装仕上げであり、粗面は一樣粒径 k_s のガラスビーズを河床に密に張り付けて構成した (ケース B、C 及び D の k_s はそれぞれ 1.3 mm、5.1 mm 及び 12.5 mm である)⁷⁾

R_e 、 F_r 及び相当粗度 k_s^+ のうちで、2つのパラメータを固定して残り1つを変化させ、2次元開水路流の乱流構造に及ぼす各パラメータの影響を系統的に検討するために、Table 4・1に示す水理条件を設定した。まず、(a)は F_r をほぼ一定とした滑面乱流であり、 R_e の影響を知ろうとした実験グループである。しかし、本実験ではポンプの容量制限から $R_e \approx 5 \times 10^4$ がほぼ上限であって、 R_e の影響に関する考察は従来の空気乱流の実験結果との比較検討に主眼を置いた。次に、(b)は R_e がほぼ一定の滑面乱流であり、常流域から射流域の広範囲にわたる F_r の影響を検討する⁸⁾。最後に、(c)は R_e 及び F_r をほぼ一定に保ち、壁面粗度の影響を考察しようとしたものである⁷⁾

4・2・2 実験方法及びデータ解析方法

乱れ計測には DISA 社製の定温式熱膜流速計が使用されたが、この計測技術はすでに第3章で確立された。すなわち、 u と v 及び u と w の変動成分ペアが2成分熱膜プローブ (DISA 55A89 型) で計測され、また壁面近傍の u 変動が1成分熱膜プローブ (DISA 55A83 型) で計測されて前者のデータが補完された。

Fig. 3・13で示したように、熱膜流速計からの出力電圧は京都大学大型計算機センターの A・D 変換機 (FACOM U-200) で数値化されたのち、電算 (FACOM 230-75) 処理された。A・D 変換に際してはサンプル総数 N 及びその時間間隔 ΔT の決定が問題となる。解析可能な最大波数 k_∞ は次式で与えられる。¹¹⁾

$$k_\infty \equiv L_x \cdot k_\infty \approx \frac{\pi}{\Delta T (U/h)} \quad \cdots \cdots (4.1)$$

本研究では乱れエネルギーの逸散率 ε の評価方法として 2・3・3の「給水管」法を採用するから、少なくとも慣性小領域までの解析が必要である。この必要条件を満たすには k_∞ を約 100 以上にすればよく、各水理条件の (U/h) に従って ΔT が適宜選択された。

次に、サンプル総数 N の決定には明確な基準はないが、統計処理結果を安定にする必要がある。現象論的にいえば、平均値評価時間 $T \equiv \Delta T \cdot N$ 内に一連の bursting 現象すなわち coherent な渦運動をほぼ同数個含むような T の決定が合

理的と考えられる。第5章で明らかにされるが、bursting周期 T_B は $(2 \sim 3)h/U_{max}$ でほぼ与えられるから次式が得られる。

$$\frac{T}{T_B} = \frac{\pi}{(200 \sim 300)} \left(\frac{U_{max}}{U} \right) N \sim \frac{N}{50} \quad \cdots (4.2)$$

すなわち、 N をほぼ一定に選んでよく、これまでの著者の解析経験上から各ケースとも1測点当り $N = 5000$ 個と決定した。¹²⁾

第4・3節 乱れ強度分布の普遍特性

第2章の理論予測から、開水路乱流の構造解明には乱れエネルギー $q^2/2$ の変化特性を知ることが不可欠であると考えられ、これに関する実験的研究をこれまで行って来たが、その結果次の特性が明らかになった(例えば、文献7)の Fig. 1 を参照)。^{8), 7)} すなわち、乱れエネルギーの変化特性は自由水面に向かって単調に減少するが、この値が大きな壁面近傍ほどその変化率は大きく、壁面から離れるに従ってこの変化率も鈍くなり平坦な分布をなす。このため、熱エネルギーなど他の種類のエネルギーの性質から類推して、乱れエネルギーもその勾配に比例した変化特性を示すのではないかと考えられる。このとき、

$$\frac{1}{q^2} \frac{d(q^2)}{d\xi} = \frac{d(\ln q^2)}{d\xi} \equiv -\lambda < 0 \quad \cdots (4.3)$$

この概念は第2・4節で引用した Zagustin らの仮説と類似しており、また先述の Townsend の乱流モデルを自由水面領域に適用すれば次式が得られる。⁹⁾

$$\frac{L_e}{(q^2)^{3/2}} \frac{d((q^2)^{3/2})}{dy} \equiv -\lambda' < 0 \quad (\text{定数}) \quad \cdots (4.4)$$

L_e は Townsend が定義したマクロ・スケールであり、ほぼ水深 h に等しいから、式(4.3)は Townsend 流の乱流モデルとも見なすことができる。

さて、比例定数 λ を一定とすれば次式が得られる。

$$\frac{q^2}{2U_*^2} = D' \cdot \exp(-\lambda\xi) \quad (D' \text{ は積分定数}) \quad \cdots (4.5)$$

このように、実験結果に基づいた現象論的な仮説から、乱れエネルギーは指数関数式(4.5)で表示されることが予測される。そして、 λ 及び D' の値が普遍定数であるか否か、すなわち式(4.5)が普遍関数と見なせるかは以下で系統的に詳しく検討され、本節の重要な研究目的となっている。

4・3・1 平均流速分布及び摩擦速度

予備実験の結果、計測断面内ではほぼ2次元、等流の十

分に発達した乱流が得られ、平均流速は対数則分布に従うことが確認され (Fig. 2・19 参照)。^{*)} また粗面乱流では Nikuradse の曲線に一致するように y 軸の原点移動(粗度頂部より $k_s/4$ 下方に移動された)が行われた。¹³⁾

さて、各乱流領域の乱れ特性値をその特性速度及び長さスケールで普遍関数表示しようとする際に最も重要なパラメータの一つは摩擦速度であることが第2・4節で明らかにされたが、その評価方法は正確かつ合理的でなければならない。⁷⁾ 摩擦速度の評価方法には次のものが考えられる。

(1) エネルギー勾配 I_e からの評価法

$$U_*'' = \sqrt{gh I_e}, \quad I_e \equiv S - dh/dx \quad \cdots (4.6)$$

から容易に摩擦速度 U_*'' が決定されるが、河床勾配 S や水面形の測定に誤差が伴い易く、精度よい値は期待できない。

(2) 対数則からの評価法 平均流速が対数則分布を示すことから、既知の普遍定数すなわち Karman 定数 $\kappa = 0.4$ を使って摩擦速度 U_*' を逆算しようとする方法である。

(3) Reynolds 応力分布からの評価法 式(2.5)から R_* が十分大きいとき壁面近傍を除いて Reynolds 応力 $-\overline{uv}$ は直線分布をなす。したがって、Reynolds 応力を実測すれば容易に摩擦速度 U_*' が決定できる。

(4) 粘性底層内の平均流速勾配からの評価法 定義に従って $U_*^2 = \nu \partial U / \partial y|_{y=0}$ から決定されるが、一般に底層内の平均流速の測定は容易でない。

(5) その他 熱輸送アナロジーから Stanton 数を知って摩擦速度を概算したり、Preston 管法やせん断応力の直接計測法などがあるが、本研究では採用しない。

以上の評価法のうちで、(3)は他の方法とは著しく相違した特徴を持っている。すなわち、(3)では Reynolds 応力という乱れ特性値から評価されるのに対して、他の方法では平均流速分布などの平均乱特性値が既知であればよいから特に乱れ計測をする必要はない。先述の乱れの self-consistency から考慮すれば、任意の乱れ特性値は Reynolds 応力 $-\overline{uv}$ と相関づけられ、後者は式(2.5)の理論式によって直接に摩擦速度と結びつけられる。したがって、平均乱特性のみを対象とするのであれば、(1)や(2)などの評価法でも十分であろうが、乱れ特性に主眼を置き、その物理機構を解明する目的には(3)の方法が最も合理的と考えられる。換言すれば、式(2.5)は2次元乱流で理論的に成立する唯一簡単な乱れ特性分布式を表わすことから、以下では(3)の方法が一貫して使われた。

さて、Table 4・1 に、上述の(1)、(2)及び(3)の方法から評価した摩擦速度 U_*'' 、 U_*' 及び U_* をそれぞれ一括して示

*) 全ケースでアスペクト比 B/h は6以上であるから、予備実験や従来の結果¹⁴⁾からほぼ2次元乱流が得られたと考えられる。したがって、本研究では側壁の影響を無視できるとして、 R_e 、 F_r 及び壁面粗度の影響を検討した。

した。ケース G-5 を除いて三者は 30% 以内で良好に一致するが、 R_e や F_r や粗度 k_s^+ が大きくなれば相互のばらつきも大きくなる傾向が見られた。なお、ケース B-1 及び C-1 は不完全粗面乱流に、ケース D-1 は完全粗面乱流にそれぞれ属することがわかる。

4・3・2 乱れ強度に及ぼす Reynolds 数の影響

Fig. 4・2 は、Table 4・1 の条件(a)、すなわちほぼ R_e のみを変化させた水理条件で得られた実験結果であり、Laufer (1954) による管路流での実験曲線も併示した。¹⁵⁾ なお、この水理条件では w 変動成分は計測されなかった。

R_e の範囲が小さいためこの影響に関する明確な結論は下せないが、本実験に関する限り U_* で無次元化された乱れ強度分布には R_e の顕著な影響は現われていない。Laufer の結果でも、 $R_e = 2.2 \times 10^4$ の実験精度は劣ると彼自身認めているが、¹⁵⁾ ほぼ R_e にはよらない普遍的特性を示すと考えられる。

まず、 $\xi \leq 0.5$ では本実験値は Laufer の結果とよく一致し、普遍表示されている。すなわち、 u'/U_* は $\xi = 0.1$ で約 2.0、 $\xi = 0.5$ で約 1.4 となり、単調に減少する。一方、 v'/U_* はそれほど大きな変化を示さず、ほぼ 1 程度と考えてよい。

次に、 $\xi \geq 0.5$ では本実験値は Laufer の曲線から系統的に差異を生じ、 ξ が大きくなっても減少せずほぼ一定値を保つようである。(a) の実験では $F_r = 0.7$ であり、水面変動が相当激しく、いわゆる波立った流れを示した。自由水面近くに置かれた熱膜流速計は、乱れ自身の変動以外に水面波による変動も感知するから、この流速計から得られた乱れ強度は水面変動がもつエネルギーを一部含むと考えられ、管路流での実験値との差異を示したのであろう。しかし、実在の速度変動を乱流本来の乱れと水面変動に伴う乱れとに厳密に分けることは困難であり、いま Bradshaw による乱れの運動形態区分を適用する¹⁶⁾ 彼によれば、普遍関数表示される乱れ成分を“active”、残りの成分を“inactive”と区別したとき、後者の成分は遠方での圧力変動に関与する渦なし運動と低周波成分の渦運動とから成立する。開水路乱流場では水面変動に伴う乱れがちょうどこの inactive 成分に相当すると考えられ、この乱流構造は普遍的特性を失うものと推測される。このような乱流構造に及ぼす自由水面の影響については第 4・5 節で検討される。

さて、第 6・2 節で提案される π -型渦モデルを適用すれば、 u'/u' 及び w'/u' は ξ に無関係な定数となり、¹⁷⁾ したがって式 (4・5) から次式が得られる。

$$\frac{u'}{U_*} = D_1 \cdot \exp\left(-\frac{\lambda \xi}{2}\right), \quad \frac{v'}{U_*} = D_2 \cdot \exp\left(-\frac{\lambda \xi}{2}\right)$$

$$\frac{w'}{U_*} = D_3 \cdot \exp\left(-\frac{\lambda \xi}{2}\right) \dots\dots\dots (4 \cdot 7)$$

ここで、 D_1 、 D_2 及び D_3 は実験定数 ($2D' = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2$) である。

Fig. 4・2 には式 (4・7) を併示したが、水面変動の影響が及ばない領域では実験値とかなり良好に一致し、両者の比較から $\lambda = 2.0$ 、 $D_1 = 2.30$ 及び $D_2 = 1.27$ が得られた。換言すれば、式 (4・7) は R_e に関する普遍関数であると考えるとよい。

ところで、Ljatkher (1967) は Navier-Stokes の式を線形近似し、2 次元変動成分を Fourier 変換して Orr-Sommerfeld 型の微分方程式を導き、 R_e が十分大きい場合乱れ強度にこの影響が現われないと仮定して (Fig. 4・2 からこの仮定は妥当であろう) 次式を得た¹⁸⁾

$$\frac{d^2 v_*}{d\xi^2} - \left\{ (kh)^2 - \frac{m(1-m)}{(1-\alpha)} \frac{1}{\xi^2} \right\} v_* = 0$$

$$u_* = \frac{i}{k} \frac{dv_*}{d\xi} \dots\dots\dots (4 \cdot 8)$$

ここで、

$$u_* \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) \exp -i(kx + \omega t) dx dt,$$

$$v_* \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} v(x, y, t) \exp -i(kx + \omega t) dx dt \dots\dots\dots (4 \cdot 9)$$

また、移流速度 $U_c \equiv -\omega/k = \alpha U$ 及び $U/U_{max} = \xi^m$ なる指数則を仮定している。

式 (4・8) は $v_*/\sqrt{\xi}$ に関する Bessel の微分方程式であるから、その解は変形 Bessel 関数の和として表わされ、スペクトル手法から乱れ強度が予測される。Laufer の実験データから積分定数を決めて得られた Ljatkher の理論曲線を Fig. 4・2 に破線で示した¹⁵⁾ この図から明らかに、Ljatkher の曲線は式 (4・7) と良好な一致を示し、興味深い。式 (4・8) の解である Ljatkher の普遍関数は非常に複雑な実用性に乏しい式であるが、平均流速が直線分布する、すなわち $m = 1$ の場合には次の特殊解が得られる。

$$v_*(k, \xi) = D(k) \cdot \exp(-kh) \xi \dots\dots\dots (4 \cdot 10)$$

林ら (1975) は、境界条件として粘性底層端でのスペクトル形をデルタ関数に選び、また従来の実験資料から未知定数を決定して式 (4・10) から式 (4・7) を導き、 $\lambda = 2.0$ 、 $D_1 = 2.2$ 及び $D_2 = 1.7$ を得た¹⁹⁾ D_3 の値は著者の結果と相異しているが、 D_1 の値はほぼ一致する。

以上のように、式 (4・8) の解である Ljatkher の普遍関数が式 (4・7) とよく一致することを考慮すれば、乱れ強度分布の普遍関数を式 (4・7) の指数関数で近似表現することは上述の現象論的な考察のみならず、Navier-Stokes の式からも

矛盾しないものと考えられる。

4・3・3 乱れ強度に及ぼす Froude 数の影響

Fig. 4・3 はほぼ F_r のみを変化させた Table 4・1 (b) に関する実験結果を示したものである。 F_r が大きいほど水深は浅くなり、乱れ計測の可能な範囲は狭められて壁面領域や自由水面領域での実験値を得難くなるが、ほぼ全領域にわたって実験値のばらつきに有意な差異は認められない。すなわち、 F_r を常流域から射流域へと大幅に変化させたにもかかわらず、 U_* で無次元化された乱れ強度はどの成分に関しても普遍表示されて、 F_r の影響は認められない。ただ、ケース G-2 の $\xi > 0.5$ ではこの普遍曲線からのずれを示したが、これは先述した水面変動の影響すなわち inactive 成分の寄与と考えられ、第 4・5 節で検討される。

常流と射流との平均流特性は相異なるから²⁰⁾ 当初著者は乱れ特性にも F_r の影響が顕著に現われるものと推測して研究を進めたが、上述のように常流域と射流域とではほぼ同じ普遍特性が得られた (第 4・5 節で示すように限界流付近は別である)⁸⁾。これは、式 (2・27) で示すように平均流特性値が渦度の項、すなわち平均流速勾配の形でしか直接的には乱れエネルギーに関与せず、したがって乱れはそれ自身の中で丸く収まろうとする self-consistent な特性を示すためと推測される。換言すれば、乱流場全体の inactive 成分より局所的な普遍特性のある active 成分の寄与の方がはるかに大きいと考えられる。

以上のように、本実験の範囲内では U_* で無次元化された乱れ強度は普遍特性分布を示すから、次にこの関数形を考察する。

まず、式 (4・7) の指数関数を適用し、Fig. 4・3 に示した実験値との比較から新たに $D_3 = 1.63$ が得られた。この図から明らかなように、壁面のごく近傍を除いたほぼ全領域で実験値と式 (4・7) との一致は非常に良好である。したがって、式 (4・7) は F_r に関しても普遍関数であると考えられ、以上の結果をまとめて再記すれば次のようである。

$$\left. \begin{aligned} u'/U_* &= D_1 \cdot e^{-\xi}, & D_1 &= 2.30 \\ v'/U_* &= D_2 \cdot e^{-\xi}, & D_2 &= 1.27 \\ w'/U_* &= D_3 \cdot e^{-\xi}, & D_3 &= 1.63 \end{aligned} \right\} \cdots (4.11)$$

ξ が増加すると乱れ強度は単調に減少するが、その減少率は D_i の値に比例して u' , w' , v' の順に小さくなる。乱れ強度の絶対値もこの順序で小さくなり、自由水面まで $u' > w' > v'$ の関係が認められる。このとき

$$v'/u' = D_2/D_1 = 0.55, \quad w'/u' = D_3/D_1 = 0.71 \quad \cdots (4.12)$$

であり、乱流のほぼ全領域で乱れ強度の各成分比はほぼ一定であって、自由水面に近づいても乱れ強度に関する限り

等方化指向は顕著でない。この特性は境界層流や管路流と著しく異なった開水路流特有なものであり、この原因として自由水面の存在による v 成分の変動抑制が考えられる²⁾。また、Smutek (1969) も容量型圧力変換器を用いた傾斜管で開水路乱流を計測し、この乱流では等方化指向が抑制されると報告している²¹⁾。

Fig. 2・6 で示したように、乱れエネルギーは平均流と Reynolds 応力との相互作用の結果まず u 変動成分に与えられ、その後 v 及び w 変動成分へ圧力変動の働きによって再配分されるが、この再配分率は式 (4・12) から

$$u'^2/\overline{q^2} = 0.55, \quad v'^2/\overline{q^2} = 0.17, \quad w'^2/\overline{q^2} = 0.28 \quad \cdots (4.13)$$

であり、 y 方向の位置にはよらずにほぼ一定で、 u 変動成分が約半分、残りを w と v の変動成分とでほぼ 3 : 2 に配分されることがわかる。

次に、第 2・4 節で提案されたベキ型の普遍関数を検討してみる。平均渦径 L_x/h の変化特性によってベキ指数は変化するため、全領域の乱れ強度を同一のベキ関数で簡単に表示することは困難であり、その適用範囲が限られることから式 (4・11) の普遍関数に比べて実用価値は劣るといえる。

いま、式 (4・4) のマクロ・スケールと同等な $L_x \sim h$ のとき導かれる式 (2・81) のベキ関数、すなわち

$$u'/U_* = \xi^{-1/3} \quad \cdots (4.14)$$

を一例として Fig. 4・3 に示した。確かに式 (4・14) は全領域にわたる実験値を精度よく表示しておらず、単に概略的な特性を説明するに過ぎないと考えられる。

以上は ξ による普遍関数表示であって平衡領域及び自由水面領域に適用されるが、第 2・4 節で指摘したように壁面領域では $y^+ \equiv yU_*/\nu$ で表示せねばならない。壁面領域の上限は $\xi \approx 100R_*^{-1}$ であるから (b) グループのように R_* が比較的大きい場合は壁面のごく近傍に限られ、乱れ計測自体が困難となるが、一方乱流場全体に占める実際上の重要性も低くなり、すべて式 (4・11) の ξ -表示で実用上十分であろう。しかし、第 2・6 節で指摘したように、この壁面領域では乱れ発生に寄与する bursting 現象が最も著しく、壁面乱れの物理機構の解明には不可欠な領域である。

さて、Fig. 4・4 は壁面領域 ($y^+ \leq 100$) に重点をおき、乱れ強度を y^+ で表示したものであり、 R_* が比較的小さい実験ケース A-1 の結果も比較のため併示した。実験値には若干ばらつきがあるが、 F_r の影響は見られず、 R_* が一定であればほぼ普遍表示されている。

まず、 u'/U_* に関しては Laufer の実験値とかなり良好に一致し、 $y^+ \approx (15 \sim 20)$ すなわち粘性底層外縁で急激なピークに達したのち緩やかに減少するようである。第 4・7 節で示されるが、乱れ発生率もこの底層外縁でほぼ最大

になることから、乱れの発生は u 変動成分にまず寄与するであろうという第 2・2 節の予測の妥当性が確認され、またこの u 変動と乱れ発生機構との密接な関係は第 5 章で詳細に検討される。 y^+ が対数則領域に移ると u'/U_* は減少するが、 R_* が大きいほどその減少率は小さくほぼ一定値に達するようである。いま、式 (2・13) で $\kappa = 0.4$ 、 $A = 27$ とおき、 $R_* = 600$ 及び 1600 のとき Reynolds 応力の分布式 (2・5) を Fig. 4・4 に示した。 R_* が大きいほど一定せん断応力層が広範囲まで形成され、 u'/U_* の減少特性と軌を一にしている。すなわち、 R_* が大きいほど壁面領域の乱流構造は、境界層流とか開水路流とかいう主流の種類や水理条件、すなわち外部パラメータには左右されない普遍的なものと考えられる。

次に、 v'/U_* の変化特性は u'/U_* より単純のようである。壁面領域での実測値が少なく十分な考察はできないが、Laufer の結果を考慮すると v'/U_* は buffer 層端 ($y^+ \sim 30$) まで増加を示し、以後ほぼ一定値に達してしまい、 u'/U_* に見られた顕著なピークは認められない。

さて、 y^+ に対する乱れ強度の普遍関数表示を考察する。まず、式 (4・11) が壁面領域まで適用可能ならば次式を得る。

$$\frac{u'}{U_*} = D_1 \cdot \exp\left(-\frac{y^+}{R_*}\right), \quad \frac{v'}{U_*} = D_2 \cdot \exp\left(-\frac{y^+}{R_*}\right) \\ \frac{u'}{U_*} = D_3 \cdot \exp\left(-\frac{y^+}{R_*}\right) \dots\dots\dots (4\cdot15)$$

$R_* = 600$ 及び 1600 での式 (4・15) の u'/U_* を Fig. 4・4 に示したが、 $y^+ > 50$ で実験値とかなり良好に一致している。ところで、Monin ら (1971) は、 R_e が十分大きいとき乱れ強度は y^+ に対して普遍表示されて、 y^+ が大きくなると一定値に収束すると指摘し、従来の多くの実験資料を整理して次の値を提案した²²⁾

$$u'/U_* \rightarrow 2.3, \quad v'/U_* \rightarrow 0.9, \quad w'/U_* \rightarrow 1.7 \\ \dots\dots\dots (4\cdot16)$$

一方、式 (4・15) で $R_* \rightarrow \infty$ ($R_e \rightarrow \infty$) とすれば、

$$u'/U_* \rightarrow 2.3, \quad v'/U_* \rightarrow 1.27, \quad w'/U_* \rightarrow 1.63 \\ \dots\dots\dots (4\cdot17)$$

となり、 v'/U_* の収束値には若干の差異があるが、 u'/U_* 、 w'/U_* の収束値は両者で非常に一致を示している。

したがって、 $y^+ \geq 50$ では普遍関数として式 (4・15) の指数関数が採用できるものと考えられる。しかし、 $y^+ < 50$ では式 (4・15) は実験値と差異を示し、特に u'/U_* のピーク特性を表わさないからこの式は適用できない。Clark ら (1971) の可視化観測によれば、この領域の攪乱渦は周囲からエネルギーを吸収してその渦回転と渦径が共に増大して行く発達段階にある²³⁾ 換言すれば、bursting 現象が顕著

に現われてこの乱流構造は極めて非平衡状態にあるから、式 (4・15) の前提条件である式 (4・3) がもはや成立せず、上述のように実験値と差異を示すと考えられる。そして、この領域に適用される普遍関数は第 6 章で考案される新たな乱流モデルによって与えられるであろう。

最後に、2・4・2 で予測されたベキ型の普遍関数の妥当性を検討する。すなわち、式 (2・66) を Fig. 4・4 に破線で併示した。係数 A_3 の値は R_* によって若干異なるが、4.0 ~ 4.5 をとるようである。 $y^+ \geq 30$ の壁面領域では、式 (2・65) は実験値と良好な一致を示し、概ね妥当な普遍関数であると考えられる。

4・3・4 乱れ強度に及ぼす壁面粗度の影響

Fig. 4・5 は壁面粗度のみを変化させたときの実験結果であり、本実験とは同じ水理条件で水素気泡から得られた Grass (1971) による実験結果も併示した²⁴⁾ 両者の一致は非常に良好であって乱れ強度に及ぼす粗度の影響を考察できる。

まず、最も顕著な特徴は壁面近くで粗度の影響が系統的に現われている点である。すなわち、 k_s^+ が大きくなると u'/U_* の最大値は減少し、その変化率も小さくなるが、一方 v'/U_* や w'/U_* に与える粗度の影響はそれほど顕著ではない。結局、 $\overline{q^2}/2U_*^2$ と与える式 (4・5) の係数 λ や D' が k_s^+ によって変化する結果となるから⁹⁾ 乱れ強度の普遍関数は式 (4・7) よりかなり複雑となろう。Fig. 4・5 から判断して、乱れ強度に及ぼす粗度の影響範囲は ϵ が約 0.3 程度までであり、ほとんど壁面領域に限られている。壁面領域から離れるに従って粗度の影響は弱まり、図に示したように $\epsilon > 0.3$ では式 (4・11) は実験値とかなり良好な一致を示し、この範囲での妥当な普遍関数であるといえる。

以上から、粗度の影響を系統的に検討するには壁面領域に主眼を置くべきであり、Fig. 4・6 に実験値を y^+ に対して図示したが、この図でも著者の実験結果は Grass のものと非常によく一致している。粗度 k_s^+ が増加すると u'/U_* の最大値は系統的に減少するが、その発生位置 y_m^+ はあまり変らない。したがって、 $k_s^+/4 > y_m^+ \approx (15 \sim 20)$ すなわち k_s^+ が約 70 以上の完全粗面乱流となれば、 y_m^+ の位置は粗度頂部以下となるから、 u'/U_* の明確なピーク特性が消滅するものと考えられ、実際ケース D-1 でのピークは不明瞭なものとなっている。一方、本研究では壁面近傍の v'/U_* や w'/U_* の実測値は得られなかったが、その外部の測定値から推測してこれらの値は u'/U_* ほどには粗度の影響を受けていないと判断される。Grass の結果では、 k_s^+ が増すと u'/U_* とは逆に v'/U_* は若干増加するようである。これは、壁面がよりルーズとなり、 v 変動に対する拘束条件が緩和されるためであろう。

以上のような粗度の影響による特性は Chen ら (1974) の実験でも認められている²⁵⁾ 先述のように、 u 変動は乱れの

発生と密接に関係するから、その発生機構は粗度によって何らかの変化を受けるものと推測され、第5章で詳しく検討される。

さて、 u'/U_* に及ぼす粗度の影響に関しては、次のような現象論的な説明が可能であろう。

後述するように、Antoniaら(1971)²⁶⁾ Chenら(1974)²⁵⁾ 著者ら(1975)⁷⁾などは粗度の増大と共に壁面近傍の平均渦径 L_x^+ が減少することを実験的に明らかにした。このため、壁面粗度の増大と共に式(2.65)の A_2 は減少し、したがって式(2.66)の A_3 も減少して u'/U_* は小さくなる。後の4.6.4及び4.7.1で示される平均渦径及び乱れ逸散率の分布特性から、 A_3 の値は滑面乱流で4.36、粗面乱流で3.77と予測され⁷⁾ この場合の式(2.66)がFig. 4.6の④及び⑤としてそれぞれ示される。実験値と若干差異はあるが、壁面領域での粗度の影響をよく説明している。

このように、粗度によって平均渦径が減少する、すなわち攪乱渦が崩壊され易くなると乱れエネルギーの再配分はより等方化に向かうであろう。つまり、粗面乱流ほど乱れの等方化指向が強くなり、 u' の減少及び v' の増加という事実をもたらしたものと考えられる。なお、Fig. 4.6には式(4.15)を併示したが、実験値との差異は無視できない。しかし、 $y^+ > 50$ の粗度影響が比較的弱い領域では式(4.15)を近似的に適用しようと考えられる。

さて、式(2.87)から明らかなように平均流速 U^+ も平均渦径 L_x^+ と同様に粗度 k_s^+ の増大に伴って減少する。今本(1972)はEngelund(1969)が指摘した L_x/h と U^+ との比例関係を前提として²⁷⁾ $(u'/U_*)(U^+)^{-1/3}$ は ξ に対して普遍表示されると提案した²⁾ 今本によるこの普遍表示は u'/U_* に及ぼす粗度の影響を平均渦径の代わりに平均流速で補正しようとする試みと解釈される。

いま、上述の $(u'/U_*)(U^+)^{-1/3}$ 表示を壁面領域に実際に適用してみたのがFig. 4.7である。Fig. 4.6と比較すれば明らかなように、粗度の影響が強い $y^+ \leq 70$ では $(u'/U_*)(U^+)^{-1/3}$ は粗度 k_s^+ には無関係な普遍特性を良好に示し、注目されるが、粗度の影響が弱くなる $y^+ > 70$ では u'/U_* 表示に比べて見かけ上粗度の影響がかえって現れてくるようである。これは L_x^+ 及び U^+ に及ぼす粗度の影響範囲が同一でないためであり、式(2.87)で示すように U^+ の方は流れ全域でこの影響を受けるから、 (u'/U_*) に $(U^+)^{-1/3}$ を乗ずればかえってこの粗度影響を見かけ上受けてしまい、過大評価されるものと考えられる。 L_x はマクロ・スケールであるから平均流特性との相関は強いが、依然として乱れ特性値であることに変わりはない。第4.6節で明らかにされるように、この乱れ特性値は壁面の種類(壁面境界条件)に影響されるが、壁面からある距離離れると、この影響は緩和されて普遍的あるいは相似的特性を示し、以上の結果も先述した乱れの self-consistency に基づく特性として理解されねばならない。したがって、Fig.

4.7に示された実測値を予測し得る普遍関数を求めることが必要であり、このことは第6.4節で結合モデルを使って検討される。

第4.4節 相対乱れ強度及び Reynolds 応力

4.4.1 相対乱れ強度分布

前節の普遍特性表示は乱れの物理機構を解明しようとする目的には不可欠な研究課題であるが、摩擦速度を正確に決定しておかねばならず、実用的な目的には必ずしも適当な表示方法とはいえない。一方、平均流速に対する乱れ強度の大きさ、すなわち相対乱れ強度の分布特性が既知であれば容易に得られる平均流速から乱れ強度を評価でき、その実用価値は大きいといえる。しかも第3.3節で指摘したように u'/U を算出する過程で使われる熱膜流速計の較正曲線は、水温変化等の影響が顕著に現われる較正曲線係数 A を含まないから、この計測値にはそれだけ良好な精度が期待できる。このため熱膜流速計の較正曲線や摩擦速度の決定方法に疑問が持たれる初期に発表された乱れ計測結果でも、 u'/U の計測精度は意外に良く、これらに関して系統的な整理や考察が可能である。 u' が既知であれば壁面近傍を除いて式(4.12)から v' や w' の成分は評価でき、したがって u'/U のみの変化を把握すれば実用上十分であると考えられる。

(a) u'/U に及ぼす R_τ の影響

Fig. 4.8はほぼ R_τ のみを変化させて得られた u'/U の実験結果であり、Laufer(1951)²⁸⁾及びBlincoら(1971)⁴⁾の実験曲線も併示した。 u'/U の実験値は若干ばらついてはいるが、 R_τ が大きいほどほぼ系統的に減少し、この特性は $\xi \leq 0.1$ なる壁面近傍で著しい。一方、 $\xi > 0.1$ の主流域では平均流速 U が大きく、 u' に与える実験誤差や inactive 成分の影響は相対的に小さくなり、 u'/U は R_τ にほとんどよらない単一の曲線ではばらばらとされる考えられる。また Laufer や Blinco らの実験結果も上述とほぼ同様な変化特性を示している。すなわち、 $\xi \approx 0.01$ と壁面のごく近傍では u' の大きさは平均流速の2~3割にも達するが、 $\xi \approx 0.1$ で1割強となり、 $\xi \approx 1.0$ で約0.5割まで単調に減少する。

いま、 u'/U_* として式(4.11)、 U^+ として式(2.67)の対数則を使えば次式が得られる。

$$\frac{u'}{U} = \frac{2.3 \exp(-\xi)}{\kappa^{-1} \ln \xi + A(R_*)}$$

$$A(R_*) \equiv \frac{1}{\kappa} \ln R_* + 5.5 \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

$\kappa = 0.4$ とおき、 $R_* = 600$ 及び2000に対する式(4.18)をFig. 4.8に示した。 $\xi < 0.1$ の壁面近傍では式(4.11)や対数則分布自体の適用性が悪いから式(4.18)は実験値

と差異を示すが、 $\xi > 0.1$ では良好な一致が見られる。すなわち R_ξ が大きいほど相対乱れ強度は減少するという上述の特性をよく表わしている。

(b) u'/U に及ぼす F_τ の影響

Fig. 4・9 は F_τ の影響を検討したものであり、McQuivey ら (1969)²⁾ や玉井ら (1975)²⁹⁾ の実験結果も併示した。 F_τ を大幅に変化させたにもかかわらず、Fig. 4・8 で見られた系統的な差異はなく、実験誤差内ではほぼ単一な変化特性を示している。すなわち相対乱れ強度に及ぼす F_τ の影響はほとんどないと結論してよいであろう。

玉井らの R_ξ は著者のものとはほぼ同じであり、両者の実験結果は良好な一致を示した。また McQuivey らの計測範囲は R_ξ の影響が小さい $\xi \geq 0.1$ であるから、同様に著者の結果とよく一致している。 u'/U の変化特性は Fig. 4・8 に示したのと同様に、歪んだ S 字形の曲線を描きながら単調に減少する。式 (4・18) 及びベキ型の式 (4・14) を用いた $R_* = 1600$ に対する計算曲線をそれぞれ Fig. 4・9 に併示した。壁面のごく近傍を除き、式 (4・18) の方が実験値とより良好に一致し、またこの式自体 F_τ の影響を考慮しなくてもよいことを示している。

(c) u'/U に及ぼす粗度の影響

同様に Fig. 4・10 で u'/U に及ぼす粗度の影響を検討した。滑面乱流から粗面乱流へ移行すると相対乱れ強度は明らかに増大する。この特性は壁面近傍ほど顕著であり、自由水面近傍では粗度の変化にあまり左右されていない。いわば自由水面での値 ($u'/U \approx 0.05$) を固定点として滑面乱流の分布から増大する方向へと扇形状の変化特性を示している。 R_ξ (正確には R_*) が等しければ粗度の大きさとして相対粗度 k_s/h を用いてよいから、本実験値は Blinco らの実験結果と比較でき、図に見られるように両者の一致は良好である。

さて、式 (2・87) と式 (4・11) から次式が得られる。

$$\frac{u'}{U} = \frac{2.3 \exp(-\xi)}{\kappa^{-1} \ln \xi - \{\kappa^{-1} \ln(k_s/h) - C_\tau(k_s^+)\}} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 19)$$

$\kappa = 0.4$ 及び切片定数項 $C_\tau(k_s^+)$ には Nikuradse の実験結果を用い¹⁰⁾ 各ケースの相対粗度 k_s/h を代入した式 (4・19) を Fig. 4・10 に示した。先述のように壁面近傍では式 (2・87) 及び (4・11) の適用性は共に悪く、式 (4・19) と実験値との不一致は著しいが、それ以外の領域では相対乱れ強度に及ぼす粗度の影響をかなり良好に表示しているといえる。完全粗面の C_τ 値は一定であり、また不完全粗面でも $C_\tau(k_s^+)$ の変化幅は小さいから、相対乱れ強度に及ぼす粗度影響はほぼ相対粗度によって決められると考えてよい。前述の結果では R_ξ が増加すると u'/U は減少し、また通常 k_s/h も小さくなるから、 u'/U は一段と減少しがちとなる。すなわち、粗面乱流は滑面乱流に比べて R_ξ の影響を受け易い

といえる。

4・4・2 Reynolds 応力分布

第2章で指摘したようにせん断乱流では Reynolds 応力 $-\overline{uv}$ が極めて重要な役割を演ずるから、乱れの内部構造解明にはこの特性を知ることが不可欠である。このため開水路乱流での Reynolds 応力を直接計測する必要性が古くから叫ばれて来たが、これが実現したのは McQuivey ら (1969) による1成分傾斜熱膜センサを用いた“yawed-film”法の開発以来のことである²⁾ 1970 年代初頭には2成分熱膜センサが開発され、多成分同時計測が可能となり、またこのことが本研究着手の動機の一つになっている。

さて、Fig. 4・11 は Table 4・1 の各グループで得られた Reynolds 応力の実測値である。各グループの実験結果には若干ばらつきがあるが、系統的差異でない実験誤差と見なせるから、Reynolds 応力は R_ξ 、 F_τ 及び壁面粗度に依存しない普遍特性分布を示すと考えてよい。

いま、平均流速に対数則を適用すれば式 (2・5) から次式が得られる。

$$\frac{-\overline{uv}}{U_*^2} = (1 - \xi) - \frac{1}{\kappa R_* \xi} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 20)$$

各 R_* に対する式 (4・20) を Fig. 4・11 に示した。本実験の R_* の範囲では $\xi > 0.1$ で式 (4・20) の第2項(粘性項)を無視でき、Reynolds 応力は直線分布を示す。また、この主流域では $-\overline{uv}$ の実測値もほぼ直線分布を示し、この事実が $4 \cdot 3 \cdot 1$ の摩擦速度 U_* の評価法に合理的根拠を与えている。なお、グループ(b)の G-3 ~ 5 の射流実験では、水面近くで $-\overline{uv}$ は負値を示したから、水深 h として $-\overline{uv} = 0$ となる点の高さ h_s を採用した (G-5 で $h_s/h = 0.9$ であった)。

4・4・3 Reynolds 応力の相関係数

Reynolds 応力の相関係数 R は $R \equiv -\overline{uv}/u'v'$ と定義され、乱れの self-consistency を示す一つの指標と考えられる。また第2・5節で指摘したように、この特性値は瞬間 Reynolds 応力の確率分布を検討する際に不可欠な基本的パラメータとなる。

さて、Fig. 4・12 は Fig. 4・11 と同様に各グループごとの相関係数 R の実測値を示したものである。図には空気乱流に関する Laufer (1951, 1954)^{15), 28)}、Bremhorst ら (1973) による管路流³⁰⁾ 及び Lu ら (1973) による境界層流³¹⁾ の実験結果が併示されている。

グループ(a)では $\xi \leq 0.5$ での R の実測値は単一な曲線にほぼ乗り、壁面近傍を除き Bremhorst らの結果と良好な一致を示している。しかし、 $\xi > 0.5$ での本実験値は彼らの実験曲線よりかなり小さい。Fig. 4・11 の Reynolds 応力分布には水面変動の影響がほとんど見られないのに対して、

Fig. 4・2の乱れ強度分布にはこの影響が現われることから、相関係数は空気乱流の場合より小さくなるものと考えられる。

グループ(b)の実験値はそのばらつきも小さく、良好な普遍特性を示し、Bremhorstらの実験曲線と極めてよく一致している。なお、ケースG-2の $\varepsilon > 0.5$ では上述の水面変動の影響が現われて、この普遍曲線より小さくなっている。

グループ(c)の実験値は若干ばらつくため粗度影響の把握は困難である。確かに壁面近傍の実験値は粗面乱流ほど若干大きくなっているが、この変化幅は実験値のばらつき内であり、粗度の影響をほとんど受けないと考えてよい。

以上のように、相関係数 R は R_g 、 F_r 及び壁面粗度の影響をほとんど受けずに普遍特性を示すことが明らかとなった。 R の値は $\varepsilon < 0.1$ の壁面近傍で ε と共に漸増するが、 $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.6$ の平衡領域ではほぼ一定値の約0.4に達し、さらに $\varepsilon > 0.6$ の自由水面領域では単調減少して、自由水面上で零となる。 y^+ -表示すべきである壁面領域を除いて、著者の結果は他の研究者らの結果と良好に一致する。すなわち、乱れ特性値自身の内部指標と考えられる相関係数 R は開水路流、管路流、境界層流といったせん断乱流の種類には無関係な普遍特性を示すが、これは先述した乱れのself-consistencyによるものといえる。しかも平衡領域の相関係数がほぼ一定となることは乱流構造の相似性を示すものであり、第2・4節の議論の妥当性が裏づけられる。

さて、式(4・11)と式(4・20)とから得られる次式によって R の値を予測することができる。

$$R \equiv \frac{-\overline{uv}}{u'v'} = \frac{(1-\varepsilon) - (\kappa R_* \varepsilon)^{-1}}{2.92 \exp(-2\varepsilon)} \quad \cdots (4 \cdot 21)$$

Fig. 4・12には $R_* = 600$ 及び1600の式(4・21)を併示した。当然この式には適用限界があるが、実験値と概ね良好な一致を示し、相関係数の変化特性を理論的に予測できる。

さて、Reynolds 応力と乱れとの相関度を示すもう一つの重要な係数として乱れエネルギーとの比、すなわち $R_q \equiv -\overline{uv}/q^2$ がある。先述したように乱れのself-consistencyに立脚したTownsend流の乱流モデルでは R_q の特性が既知でなければならず、このモデルを発達させたBradshawら(1967)による境界層の発達に関する計算方法では $R_q \equiv 0.15$ と仮定して議論を進めている³²⁾。

グループ(b)及び(c)の実験では乱れエネルギー $\overline{q^2}/2$ の実験値が得られており、これらにおける R_q の分布がFig. 4・13に示される。 R_q の実験値のばらつきはやや大きいが、Laufer(1954)による管路流¹⁵⁾やKlebanoff(1954)による境界層流³³⁾の実験結果と比較的よく一致し、前述の R と同様にほぼ普遍特性を示すと考えられる。平衡領域における R_q の値は0.12～0.16のほぼ一定値を示し、上述のBradshawらの仮定の妥当性が確認できる。

式(4・21)と同様にして、式(4・11)及び(4・20)から R_q が予測でき、次式が得られる。

$$R_q \equiv \frac{-\overline{uv}}{q^2} = \frac{(1-\varepsilon) - (\kappa R_* \varepsilon)^{-1}}{9.56 \exp(-2\varepsilon)} \quad \cdots (4 \cdot 22)$$

Fig. 4・13には $R_* = 600$ 及び1600に対する式(4・22)が併示され、実験値の変化特性をかなり良好に表わしているといえる。

第4・5節 乱流構造に及ぼす自由水面の影響

第4・3節で考察されたように、 F_r が1に近い限界流付近の乱れ強度は式(4・11)の普遍関数から系統的なずれを示し、これは自由水面変動の影響であるとみなされた。すなわち、普遍関数からの偏差は乱れ強度のinactive成分の効果と考えた。一方、Fig. 4・11に示したように、上述の流れにおけるReynolds 応力はほぼ自由水面まで直線分布を示し、このような系統的偏差は見られなかった。すなわち、Reynolds 応力にはactive成分がすべて関与しているといえる。

ところで、Bradshaw(1967)が提示した乱れの「active・inactive」は、せん断乱流の特徴であるReynolds 応力の発生に寄与する成分であるか否かで区分されている¹⁵⁾。彼は、Reynolds 応力に寄与するactive成分が乱れの普遍的特性を示すのに対して、inactive成分は遠方での圧力変動に関与した渦なし運動や低周波成分の渦運動から成り立ついわば全域的な「ゆらぎ」であると示唆し、Hinze(1975)もこの示唆の妥当性を論じている³⁴⁾。

以上のことから、開水路乱流に特有な自由水面が乱流構造に及ぼす影響は、上述のinactive成分の挙動を把握することによって明らかにされるものと考えられ、以下では、inactive成分に関与する自由水面や壁面圧力の変動特性を検討する³⁵⁾。

4・5・1 自由水面の変動解析

瞬間の水面高 \tilde{h} を $\tilde{h} \equiv h + h'$ とし、 h' を水面変動成分とする。水面変動 h' の計測には、0.1mm径の2本の抵抗線を水路中央に1cm間隔で平行に設置した抵抗線式波高計(計測技研社製)が用いられた。この波高計の応答周波数はせいぜい50 Hzまでであるが、低周波領域のinactive成分を対象とするのであるからこれで十分と考えられる。したがって、この出力電圧は50 Hz以上のノイズがフィルターされ、Fig. 3・13の処理システムに従って以下電算処理された(サンプル総数 N は5000個である)。水理条件(グループW)はTable 4・2に示すように、 F_r のみを変化させた滑面乱流で9通り設定され、前節のグループGにほぼ対応す

る水理条件とした。なお、摩擦速度は式(4.6)から評価された U_*'' であり、概算値として表記した。

さて、Fig. 4・14は水面変動強度 $\sqrt{k'^2}$ 及び相対水面変動強度 $\sqrt{k'^2}/h$ を示した結果である。 F_r に対する両者の変化特性はほぼ同様である。すなわち、常流域内では F_r が増加すると水面変動は急激に高まり、 $F_r = 1$ の限界流付近ではほぼ最大に達している。一方、射流域に移行すると F_r の増加に伴って逆に水面変動は次第に小さくなり、 $F_r = 2$ で $F_r = 0.5$ の値にまで減少している。これらの特性はグループGの実験で限界流付近の流れが最も波立つという目視観察結果からも認められた。

このように F_r が1近くでは自由水面がいわば共振現象に似た変動を示し、inactiveな渦運動が発生しているものと考えられる。以前岩垣(1955)は、 F_r によるこのような流れの挙動がその不安定性に起因すると指摘しており²⁰⁾ また層流・乱流の遷移挙動とのある種の類似性が見出される。

そこで、この層流・乱流の遷移予測に成功を収めた微小変動波理論(Orr-Sommerfeld理論)³⁰⁾をこの水面変動特性に適用することを試みる。

開水路乱流の運動量方程式を線形近似して微小変動量 h' に関する次式が得られる³⁷⁾

$$(1 - \beta F_r^2) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} - 2\beta \frac{F_r^2}{U_m} \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} - \left(\frac{F_r}{U_m}\right)^2 \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - \frac{NS}{h} \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{2S}{U_m h} \frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \quad (4.23)$$

ここで、 S は水路勾配、 β は運動量補正係数、 N は水理指数($N = 7/3 + (1 + 2h/B)^{-1}$)である。

微小変動波理論に従えば h' は次式で与えられる³⁸⁾

$$h' = H \cdot \exp i(kx - \omega t) \quad (4.24)$$

$\omega = kV_w + i\tilde{\omega}$ とおけば V_w が微小変動波の伝播速度となる。また時間の経過と共に h' は $\tilde{\omega} > 0$ で発達(不安定)、 $\tilde{\omega} < 0$ で減衰(安定)となり、 $\tilde{\omega} = 0$ がその限界となる。

このとき、式(4.23)と式(4.24)とから $V_w/U_m = \phi$ とおいて次式が得られる。

$$\left(\frac{\tilde{\omega}}{kU_m}\right)^2 = \frac{(N-2\phi)\{1 - F_r^2(\beta - 2\beta\phi + \phi^2)\}}{F_r^2(4\beta - N - 2\phi)} \geq 0 \quad (4.25)$$

式(4.25)は微小変動波の存在条件を与えるが、 $\tilde{\omega}$ の正負を判定できない。すなわち、存在条件の境界曲線は次式で与えられる。

$$\phi = N/2, \quad \phi = 2\beta - N/2 \quad (4.26)$$

$$\phi = \beta \pm \sqrt{\beta(\beta-1) + F_r^{-2}} \quad (4.27)$$

一方、式(4.23)、(4.24)から ϕ を消去すれば、 $\tilde{\omega}$ に関する4次方程式が得られるが、 $\tilde{\omega} = 0$ 近傍の正負を判定するためにこれを1次近似して次式が得られる。

$$\frac{\tilde{\omega}h}{U_m} = \frac{S(kh)^2}{8} \times \frac{F_r^2(N^2 - 4\beta N + 4\beta) - 4}{(kh)^2 F_r^2 \{\beta(2\beta - 1)F_r^2 + 1\} + S^2} \quad (4.28)$$

したがって、 $F_{r,c} = ((N/2)^2 + \beta - \beta N)^{-1/2} \dots (4.29)$

とおけば $F_r < F_{r,c}$ で安定、 $F_r > F_{r,c}$ で不安定となる。岩垣も同様な方法で式(4.29)で与えられる安定・不安定の基準を導いている²⁰⁾

Fig. 4・15は $\beta = 1.02$ 及び $N = 10/3$ とした場合の式(4.26)、(4.27)及び(4.29)を示したものである。式(4.26)と式(4.27)の存在境界曲線は $\phi = \beta$ に関して対称であり、両者の交点が式(4.29)の $F_{r,c}$ を与える。すなわち、式(4.26)と式(4.27)で囲まれた領域で式(4.24)の微小変動波が存在し、 $F_r < F_{r,c} = 1.6$ のとき減衰し、逆に $F_r > 1.6$ のとき発達する。伝播速度 ϕ が零となるのは式(4.27)から $F_r = \beta^{-1/2} \approx 1$ 、すなわち限界流のときであり、しかもこの流れは安定となっている。したがって、Fig. 4・14で観察された限界流付近の水面変動の高揚現象は上述の微小変動波理論からは説明できない。

一方、限界流付近の流れでは不安定な波状跳水的な「うねり」がBoussinesq以来古くから観察され、その発生原因を水面曲率による水圧減少と説明されている³⁸⁾ この平均流に関する「うねり」がここで対象としている水面変動のinactive成分と何らかの関連をもつものと予想され、上述の高揚現象の発生機構を乱れ挙動の面から今後検討する必要がある。

次に、単位面積当たりの全乱れエネルギーに対する水面変動エネルギーの比を \mathcal{Q} とすれば次式が得られる。

$$\mathcal{Q} = \frac{\text{水面変動のエネルギー}}{\text{全乱れエネルギー}} = \frac{(\rho/2)g\overline{h'^2}}{\int_0^h (\rho/2)q^2 dy} \quad (4.30)$$

式(4.11)を適用すれば次式となる。

$$\mathcal{Q} = \left(\frac{U_m}{4.13U_*''}\right)^2 \cdot \frac{1}{F_r^2} \left(\frac{\sqrt{k'^2}}{h}\right)^2 \quad (4.31)$$

一定の R_e に対して U_m/U_*'' も一定となるから(Fig. 2・5参照)、グループWの平均値 $U_m/U_*'' = 23.8$ を代入した式(4.31)の結果をFig. 4・14に併示した。 \mathcal{Q} の変化特性は相対水面変動強度とよく類似し、 F_r が増加すると常流域内で \mathcal{Q} は急激に増大し、射流域になると逆に急激に減少す

る。限界流に近い常流域側で水面変動がもつエネルギーは最大となり、 $Q=1$ すなわち乱れエネルギーと同程度の大きさまで達することがわかる。したがって、このような流れでの水面変動すなわち inactive 成分の寄与は無視できず、 $4 \cdot 3 \cdot 2$ で考察したように乱れ強度分布に水面変動の影響が現われることが確認される。

最後に、水面変動のスペクトルが F_r によっていかに変化するのか検討してみる。

Fig. 4・16 は各 F_r で得られた水面変動の周波数スペクトル $F(f)$ を h^2 で基準化して示したものである。スペクトル解析には高速 Fourier 変換法 (F. F. T. 法) が用いられ、三角形フィルタを施して平滑化されている³⁹⁾ データ数は 4096 個、フィルタ数は 16 に選ばれたが、これは Blackman-Turkey 法の自由度が 64 の場合にほぼ相当する³⁹⁾ なお、 $\int_0^{f_m} F(f) df = 1$ (ここで f_m は解析可能な最大周波数) という規準化条件は 2～3% の誤差内で満足され、このスペクトル解析法が相当良精度であることが確認できた。

さて、Fig. 4・16 から明らかなようにスペクトル分布 $F(f)$ は F_r の増加に伴って系統的に変化している。まず、図中の①のように F_r が比較的小さいとき、 $F(f)$ は $f_m = 2 \sim 3 (H_z)$ で明確なピークをもち、このピーク位置 f_m より高周波側では急激に減少する。 f_m よりかなり小さな低周波数側で再びエネルギーをもつから、 f_m に相当する波動は目視観察された短波長の「さざ波」と推測される。

ところで、風波の理論に従えば $f > f_m$ で普遍平衡領域が存在して次式なる -5 乗則が成立する⁴⁰⁾

$$F(f) = a \left(\frac{g}{\sqrt{h} f^2} \right)^2 f^{-5} \dots\dots\dots (4 \cdot 32)$$

①のスペクトルは式 (4・32) とかなり良好に一致し、この図から $a = 3.7 \times 10^{-6}$ となるが、これは風波での値とほぼ同程度である⁴⁰⁾

次に、 F_r が増して②のスペクトルとなると f_m のピークは低周波数側に移行するが、依然として式 (4・32) の -5 乗則がほぼ成立している。③、④、⑤と F_r が増加するに従って高周波部はほぼ一様に減少し、低周波部は逆に増大している。このため、スペクトル分布形状は -5 乗則から次第にずれて -3 乗に移行するようである。このように本実験の範囲内では、常流域内で F_r が増加すると水面変動のエネルギーは低周波部へと系統的に移行し、前述のピーク部 f_m も次第に消滅して全周波数空間で単調減少するようになる。Fig. 4・14 の結果から小さな F_r の流れはほぼ active 成分によって支配されるから、水面変動波でも式 (4・32) の普遍表示が可能となるのであろう。しかし、 F_r の増加に伴い inactive 成分の寄与が無視できなくなり、 $F(f)$ は -5 乗則から次第に -3 乗へと移行して低周波部が増加する。すなわち、Bradshaw の指摘通り inactive 成分は低周

波成分と関係する結果となり注目される。

次に、射流域に移り⑥、⑦、⑧と F_r がさらに増大すると低周波部のスペクトルは減少し、その分だけ高周波部のスペクトルが系統的に増加している。常流域のスペクトル特性とはまったく逆であり、 F_r の増加と共に水面変動エネルギーは高周波成分へと移行し、常流域で発達した低周波水面変動 (長波) は次第に減衰するものと考えられ、このことは目視観測でも確かめられた。したがって、低周波成分と関係がある inactive 成分は射流域に移行して次第に消滅するものと推測され、Fig. 4・14 で示した変化特性と一致している。

しかし、射流域に移行して active 成分が再び流れを支配するようになって、スペクトル分布形が普遍平衡領域で成立する式 (4・32) の -5 乗則に再移行するような傾向は認められない。すなわち、ほぼ限界流に近い⑥のスペクトル分布は -3 乗で減衰し、さらに大きな F_r の⑦及び⑧では -3 乗より若干緩い勾配で減衰している。この -3 乗減衰挙動は玉井ら (1975) の実験 ($F_r = 0.73 \sim 1.33$) でも観測されている²⁹⁾ Fig. 4・15 で示したように射流での水面変動の伝播速度や安定・不安定挙動は常流のものと著しく相異なるから、上述の結果となったとも推測されるが、明確な知見を得るには今後射流域の内部構造をさらに詳しく検討する必要がある。

4・5・2 壁面圧力の変動解析

4・5・1 で水面変動による inactive な渦運動が確かめられたが、この影響は圧力変動にも現われるものと考えられ、以下では壁面圧力変動に関して検討する。

滑面水路底の中央に内径 1 mm の圧力タップが設置され、その壁面圧力変動 p がゲージ式圧力変換器 (共和電業社製) で計測された。データ処理方法は前述の水面変動解析の場合と同じである。水理条件 (グループ P) もこれと同様であり、Table 4・2 に示すように 12 通り設定された。

さて、Fig. 4・17 は圧力変動強度 p' 及び相対圧力変動強度 p'/P を示した結果である (平均圧力 P は $P = \rho gh$ である)。常流域で F_r が増加すると圧力変動強度は増大し、特に $F_r > 0.6$ で急増する。さらに限界流付近でピーク値を示し、その変化特性は Fig. 4・14 に示した水面変動の場合とよく類似している。射流域に移行すると圧力変動強度は水面変動ほどには減少せず、 $F_r > 1.5$ ではほぼ一定値に落ち着いてしまう。

ところで、式 (2・36) の圧力方程式はその主要項をとると次式のようになる⁴¹⁾

$$\tilde{\nabla}^2 \left(\frac{p}{\rho U_*^2} \right) = -2 \frac{\partial U_*^+}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial (v/U_*)}{\partial (x/h)} \dots (4 \cdot 33)$$

ここで、 $\tilde{\nabla}$ は h で無次元化された Laplace 演算子である。滑面乱流場が active 成分で支配されておれば、 $U_*^+ = \text{fun.}(\xi,$

R_e) 及び $v'/U_* = D_2 \cdot \exp(-\xi)$ と普遍関数表示されるから、圧力変動強度 p' も次のように普遍関数表示されるものと考えられる。

$$p'/\rho U_*^2 \equiv p'/\tau_0 = G(\xi, R_e) \quad \cdots \cdots (4.34)$$

また、壁面圧力の相対強度 p'/P は次式で与えられる。

$$\frac{p'}{P} = F_r^2 \left(\frac{U_*}{U_m} \right)^2 \cdot G(0, R_e) = \text{fun.}(R_e) \cdot F_r^2 \quad \cdots \cdots (4.35)$$

R_e が一定のとき、 p'/P は F_r の 2 乗に比例して増加することになるが、限界流近くではこれ以上に急増し、ここでの p'/τ_0 は普遍関数 $G(0, R_e)$ から系統的に増大するものと考えられる。そこで、 p'/τ_0 の変化特性を次に検討するが、このためには摩擦速度が正確に評価されねばならない。Fig. 4・18 はグループ G の U_* とグループ P 及び W の U_*'' の F_r に対する変化を示したものである。また、式 (2.7) から次式が得られる。

$$U_* (\text{cm/sec}) = k \cdot F_r^{2/3}, \\ k = (f/2)^{1/2} (g \nu R_e)^{1/3} \quad \cdots \cdots (4.36)$$

3 グループ共に $R_e = (3.0 \sim 3.3)$ すなわち $k \approx 3.3$ であり、このときの式 (4.36) が Fig. 4・18 に併示された。式 (4.36) は平均流特性値から導かれたものであるが、高精度が期待できるグループ G の結果とよく一致し、また U_*'' との一致も概ね良好であるから、 U_*'' の実測値を使って p'/τ_0 を評価してもほぼ妥当であろう。

このようにして得られた p'/τ_0 の実測値が Fig. 4・17 に併示される。実験値は若干ばらつくが、実線で示したような変化特性を示している。すなわち、 F_r が大きくなると p'/τ_0 は普遍関数値 $G(0, R_e)$ から次第にずれ出し、 $F_r > 0.6$ で急激に増大して $F_r \approx 0.8$ でほぼ最大に達する。 $F_r > 0.8$ では単調に減少して $F_r \approx 2.5$ で再び $G(0, R_e)$ 値へと収束している。 F_r に対するこの変化特性は先述の Ω と極めて類似し、inactive 成分の寄与と考えられる。

p'/τ_0 と Ω の変化特性で特に注目される点は、この最大値が限界流近くの常流域側に発生することである。すなわち、inactive 成分の寄与は限界流近くの常流域側で最大になると考えられ、第 4・3 節での推測の妥当性を裏づけている。

ところで、active 成分の寄与と考えられた普遍関数値 $G(0, R_e)$ は実際に R_e のみの関数であることが多くの空気乱流の実験から確認されている⁴¹⁾ それらの研究の代表的なものとして Corcos (1964) による実験結果を Fig. 8・10 に示すが⁴¹⁾ これによると $R_e = 3 \times 10^4$ で $p'/\tau_0 \equiv G(0, R_e) \approx 2.5$ となる。本実験の精度にはさらに検討が必要であるが、 $|F_r - 1|$ が大きくて active 成分の寄与が強いと

考えられる流れの p'/τ_0 の実験値は上述の空気乱流で得られた値に良好に収束するようである。

最後に壁面圧力変動の周波数スペクトル $F(f)$ を検討してみる。4・5・1 と同様にして F. F. T. 法から得られた標準化スペクトル $F(f)$ の結果が Fig. 4・19 に示される。これらのスペクトル分布形は若干複雑であるが、 F_r の変化に伴いほぼ系統的に変化している。本実験の範囲で F_r が最小な①では $f \leq 1$ の低周波部で $F(f)$ は単調に減少するが、小さなピークが $f_m \approx 1.3 (H_z)$ で起こり、以後ジグザグしながらほぼ一定値を保ち、 $f \approx 5 H_z$ で鋭い最大値をとったのち急激に減少している。②では f_m の位置が若干低周波側に移行する以外①とほぼ同じ変化特性を示すが、inactive 成分の寄与が顕著となる $F_r \geq 0.6$ の③、④、⑤になると f_m の位置はかなり低周波側に移行し、かつこのピーク値も増大する。このため約 $5 H_z$ まではほぼ単調減少し、圧力エネルギーの低周波移行が示されるが、依然として約 $5 H_z$ で①、②と同じ鋭い最大特性が出現する。

Fig. 4・19 に見られるように広範囲の F_r の変化に対しても約 $5 H_z$ 前後で鋭い最大特性が常に出現する結果となったが、これは著者の経験から判断して圧力検出部が共振現象を起したものと考えられる。以前著者ら (1971) は同型の圧力変換器を用いて管路内跳水の圧力変動測定を行い、約 $5 H_z$ の卓越周期を観察したが⁴³⁾ その後の研究 (1972) でこれは圧力検出部の共振現象のためと考えた⁴⁴⁾ ダイアフラム等を使った機械的な圧力変換器ではこの共振現象を防ぐことは容易ではなく、今後ピエゾ素子を直接壁面に埋め込むなど圧力検出方法に合理的工夫を講ずる必要がある。

以上の理由から、本実験で得られた約 $5 H_z$ 以上のスペクトル部分はまったく信用できない。このため、式 (4.32) と同様な $f_m < f$ で成立する active 成分による普遍関数に関しては検討できない。すなわち、普遍特性のある active 成分では式 (2.47) の $-5/3$ 乗則に対応する $-7/3$ 乗則の圧力変動スペクトルに成立するが⁴⁵⁾ 本実験結果では上述の共振現象に遮蔽されてこの特性を把握できない。

とにかく、本実験では $f < 5 (H_z)$ のスペクトル部分しか考察対象とならないが、限界流に近い常流域側で $f > f_m$ なる高周波部が減少し、逆に $f < f_m$ なる低周波部が増加するようである。すなわち、高周波部から低周波部へ圧力エネルギーの移行が行われて低周波成分の圧力変動が次第に成長してくると考えられ、先述した水面変動のスペクトル特性と同じである。

次に射流域に移り、⑥のほぼ限界流でのスペクトル特性は④や⑤と同様であり、inactive 成分の存在が確認できる。さらに⑦、⑧、⑨と F_r が増加すると低周波部から高周波部

*) Willmarth ら (1962) が指摘しているように⁴²⁾ p'/τ_0 の値は圧力変換器の種類や大きさ、圧力タップの加工度など計測器の良し悪しによって相当不正確となるから、本実験では普遍関数値 $G(0, R_e)$ の定量評価を下すまでは至らない。

へと圧力エネルギーの再移行が起こり inactive 成分の寄与は消滅するものと考えられる。

以上の実験結果にはさらに検討が必要であるが、次の結論が得られると考えられる。すなわち、2次元開水路乱流の限界流付近では inactive な渦運動が無視できず、その乱流構造は普遍特性を失う。そしてこの inactive 成分の寄与は限界流に近い常流域側で最も顕著である。

第4・6節 スペクトル分布及び特性渦スケール間の関係

開水路流の乱流構造の解明にはスペクトル解析手法が最も有力なものの一つに挙げられるから、本節ではこの解析から得られる知見に関して実験的に考察すると共に、第2・3節で展開された理論結果の妥当性を検討する。なお、本研究で扱うせん断乱流のスペクトル特性に関しては、Kolmogoroff にはじまる局所等方性理論を唯一ともいえる重要な依り所としており、特にこの理論に関する最新の研究成果を整理した Monin ら (1975) の著書⁴⁶⁾は以下の考察を進める上で極めて大きい示唆を与えた。

4・6・1 各成分の波数スペクトル分布

Doppler 効果と同様な理由から同じ渦スケールの攪乱でも渦の移流速度 U_c によって固定点計測では周波数変調をおこすから、容易に計測可能な Euler 的周波数スペクトル $F(f)$ そのものからは乱れの空間構造を解明できず、このためには第2・3節で導入した波数スペクトル $S(k)$ を得なければならない。しかし、 $S(k)$ を実測することはほとんど不可能であり、 $F(f)$ に Taylor の凍結乱流仮説を適用して推定しなければならないのが現状である⁴⁶⁾。一様乱流場で展開された凍結乱流仮説のせん断流場への適用性に関しては従来多くの研究報告があり、(1) 各種の渦成分が異なった速度 U_c で移流される、(2) 渦成分の時間的変動が大きい場合などはその適用性は一般に悪く、種々の適用基準が提案されている^{47), 48)}。まず、渦スケールの大小によって移流速度 U_c は若干変化するが、ほぼ平均流速 U で近似できることが報告されている^{49), 50)}。このとき一様乱流場における任意の乱れ特性値 A の時間的変化は、 $dA/dt = \partial A/\partial t + U \partial A/\partial x$ であるから、完全に凍結状態で移流される。すなわち dA/dt が零であれば次式が得られる。

$$\partial A/\partial t = -U \partial A/\partial x \quad \dots\dots\dots (4\cdot37)$$

実際には完全な凍結乱流は存在せず、式 (4・37) は近似式といえるが、この近似の誤差評価として Lin (1953) は次式を与えた⁵¹⁾

$$\overline{(du/dt)^2}/\{U^2(\overline{\partial u/\partial x})^2\} = 5(u'/U)^2 \dots\dots (4\cdot38)$$

A が v または w の場合でも式 (4・38) とほぼ同様な結果が成り立つ⁴⁶⁾。Fig. 4・8 ~ 4・10 から滑面乱流の $u'/U \geq 0.1$ では $u'/U \leq 0.1$ であり、式 (4・38) は1割以内となって、式 (4・37) は良好に成立するが、壁面近傍特に粗面乱流のそこではこの近似度はかなり低くなると考えられる。しかし、 $u'/U = \sqrt{3}$ という極端に大きな場合でも式 (4・37) を適用して得られた構造関数には1割程度の誤差しか認められないという報告もあり⁴⁶⁾。この関数の Fourier 変換に当たるスペクトルに関して式 (4・37) の近似にはかなり高精度が期待できよう。

次に、せん断乱流場では $|v \partial U/\partial y| \neq 0$ であるから、式 (4・37) の近似が容認されるためには次の条件がさらに必要である⁵¹⁾

$$|v \partial U/\partial y| \ll |U \partial u/\partial x| \quad \dots\dots\dots (4\cdot39)$$

すなわち、 $k \gg d(\ln U)/dy$ が成立せねばならず、いま $U/U_{max} = \varepsilon^{1/7}$ の $1/7$ 乗則及び後述する $L_x/h = \sqrt{\varepsilon}$ の関係式を適用すると、次式が得られる。

$$ky \gg (1/7) \quad \text{あるいは} \quad kL_x \gg (7\sqrt{\varepsilon})^{-1} \quad \dots\dots\dots (4\cdot40)$$

以上の式 (4・38) 及び (4・40) から、壁面近傍ほど式 (4・37) を適用して低波数成分を解析する場合の誤差が大きくなるものと懸念されるが、これ以外の領域では式 (4・37) はかなりの近似度を与えるであろう。実際、Monin ら (1975) が引用した数多くの研究結果によれば、乱れを発生させる大きな渦成分 (発生小領域) を除いては凍結乱流の仮説が相当高い精度で成り立つようであり⁴⁶⁾ $kL_x \gg 1$ を対象とする限り式 (4・37) を適用して周波数スペクトルから波数スペクトルを換算しても妥当であると考えられる。このとき、次の変換式が適用される。

$$S(k) = (U/2\pi) \cdot F(f), \quad k = 2\pi f/U \quad \dots\dots\dots (4\cdot41)$$

第4・5節の水面変動解析と同様にして、まず F. F. T 法から規準化された周波数スペクトル $F(f)$ を求め、次に式 (4・41) から規準化された波数スペクトル $S(k)$ が得られた。その結果、どのケースでも式 (2・40) は2 ~ 3% 以内の誤差で満足され、本研究でのスペクトル解析はかなり正確であると考えられる。

さて、Fig. 4・20 はこれらの結果の概観をまず得るために、滑面乱流で得られた各成分のスペクトル分布 $S(k)$ を示した例であり、 u 成分に関しては F・F・T 法での解析データ数 $N \equiv 2^n$ を3種類に変えてそれぞれ比較している。スペクトル解析に関する限り、 $n \geq 10$ であればそれらの解析結果は良好に一致することが経験的に得られ、以下では $n = 12$ すなわち $N = 4096$ 個で解析を行った。

まず、 u 成分のスペクトル $S_u(k)$ に関しては、2・3・2の理論結果と比較検討できる³⁾。図には各小領域の特性渦スケールである L_x 、 λ_x 及び η の逆数を示したが、ほぼ Table 2・1の結果を満たしている。すなわち、 $k \sim L_x^{-1}$ では-1乗則が、 $k \geq \lambda_x^{-1}$ (正確にはこれより若干高波数側) で-3乗則が、また $k \sim \eta^{-1}$ で-7乗則がそれぞれ良好に成立している。 $R_L (\sim R_*)$ が比較的小さいために式(2・52)から L_x は λ より十分に大きくなく、発生小領域と粘性小領域の中間に厳密な意味での慣性小領域を期待できないが、Fig. 4・20 から判断して両小領域間には確かに-5/3乗則が成立していると考えられる。

本来、慣性小領域は、Fig. 2・9で示したように外的なエネルギー源すなわち発生小領域から十分に隔たった、しかも粘性の作用を受けるには至らない程度の高波数部であり、局所等方性理論が厳密に成立する所である。すなわち、式(2・42)のような等方性乱流の諸関係式が成立せねばならない領域である。このような厳密な意味での慣性小領域を期待するには、 $L_x \gg \lambda_x$ 、 η すなわち十分大きな R_e が必要であり、実験室程度の小規模な R_e ではその存在を厳密に認めることはできないと指摘され⁵²⁾ 大気乱流や海洋乱流など R_e が非常に大きな現地実験でこの厳密な慣性小領域の存在、すなわち局所等方性理論の妥当性を直接検証しようと従来多くの研究者が試みてきた⁴⁰⁾。この場合、等方性乱流の関係式すべてが厳密に満足されなくても、少なくとも構造関数に関する2/3乗則やスペクトル関数に関する-5/3乗則は相当正確に成立すると報告され、厳密さの程度を緩めれば慣性小領域の存在を否定するデータはない。特にスペクトルの-5/3乗則の成立は良好であり、とりわけ $S_u(k)$ が $S_v(k)$ や $S_w(k)$ あるいは $E(k)$ に比較してより広範囲まで-5/3乗則が成立することが大気乱流で明らかにされている⁴⁶⁾。

R_e が比較的小さい室内実験においても、Bradshaw(1967)は従来の実験結果を整理して、発生小領域と粘性小領域とある程度重複しても、それらとの相互作用が小さければ慣性小領域が近似的に成立することを指摘した³³⁾。換言すれば、Fig. 2・9のモデルに見られたカスケード過程でのエネルギー輸送率 $T \equiv \epsilon$ が外的なエネルギー源と粘性逸散に直接的には影響されずに動的な平衡状態を保っているとき、 $S_u(k)$ の-5/3乗則は近似的に成立するといえる。以上の知見から判断して、Fig. 4・20の $S_u(k)$ に見られる-5/3乗則は近似的な意味での慣性小領域の存在を示し、 u 成分に関してはFig. 2・9の給水管モデルの適用が妥当であると考えられる。

さて、式(4・40)の制約条件により低波数成分すなわち発生小領域の特性に関しては推測するほかはないが、図示したKarmanの内挿式(2・48)と実験値とはかなり良好な一致を示し、現地実験で報告されているようなスペクトルの多重構造性、すなわち発生スケールが大幅に異なる外的なエ

ネルギー源が多数存在する場合にはそれらの間で擬似的なカスケード過程が存在するという性質は見られない。例えば、大気乱流では太陽からのエネルギー源とされている4日程度の周期でおこるマクロ・スケール L_0 の擾乱 (synoptic な気団) と局所的な平均流からのエネルギー源である1分間程度の周期性をもつ微気象学的な擾乱 (通常のせん断流によるスケール L_1) とから成り立つ2重構造性 ($L_0 \gg L_1$) を、海洋乱流では地球規模のスケール ($L_0 \sim 1000\text{km}$)、潮流運動のスケール ($L_1 \sim 10\text{km}$) および風波のスケール ($L_2 \sim 10\text{m}$) の3重構造性 ($L_0 \gg L_1 \gg L_2$) を⁴⁰⁾ また実河川乱流でも蛇行流などに伴う河幅スケールの水平擾乱 ($L_0 \equiv B \sim (100 \sim 1000)\text{m}$) と局所的な平均流スケールの垂直擾乱 ($L_1 \equiv h \sim 10\text{m}$) の2重構造性 ($L_0 \gg L_1$)⁵⁴⁾ をそれぞれ示すと報告されているが、その機構に関しては現在でも不明点が多い。一方、本実験の開水路流では平均流からのエネルギー源 (h 程度のスケール) は当然存在するが、側壁が直線上に固定されているから水路幅 B に関与した水平擾乱は非常に弱いものと推測され、そのスペクトル特性は式(2・48)で表わされる単一構造であると仮定してよい。

次に、 $S_v(k)$ 及び $S_w(k)$ に関してはLaufer(1954)による管路流実験の結果と類似した変化特性を示したが¹⁵⁾ -5/3乗則が明確に成立する領域は見られない。また、前述したように v や w 成分は乱れの発生に直接には関与しないから、低波数部は発生小領域の特性である-1乗則には従わず、これより緩やかな変化特性を示している。いま、Table 2・1に示した $k \gg L_x^{-1}$ の高波数部で成り立つ $S_u(k)$ の各べき指数則から、式(2・42)の等方性乱流の関係式を使って $S_v(k)$ 、 $S_w(k)$ を計算し、Fig. 4・20に破線で示した。 $S_v(k)$ の実験値は終期粘性小領域付近から、一方 $S_w(k)$ の実験値は初期粘性小領域から式(2・42)をそれぞれ満足するようである。熱膜センサが有限である以上点計測には自ずと限界があり、またノイズの影響等を受け易いから高波数部の実験的考察は慎重を要するが、本実験のように比較的 R_e が小さいときは、慣性小領域でも厳密な局所等方性は成立せず、さらに高波数部の粘性小領域に入ってはじめて等方性乱流としての取扱いが許されるものと考えられる。

以上概観したように、 $S_u(k)$ に関しては慣性小領域の存在が近似的に認められ、しかもKarmanの内挿式が満足される単一構造であるといえるが、一方 $S_v(k)$ や $S_w(k)$ に関しては-5/3乗則の成立は不明確である。これらの諸点に関してはさらに検討を要するが、以下では主に $S_u(k)$ の特性に着目して乱流構造を考察する。

4・6・2 無次元化された波数スペクトル分布

異なった流れや各種の領域における波数スペクトルの特性を系統的に考察するには適切な特性スケールで無次元化する必要があり、この事情は乱れの空間構造を考察する場

合とまったく同様である。すなわち、乱れの空間構造では外部スケールとして h 、内部スケールとして ν/U_* が選ばれたが、波数スペクトル空間では外部スケールとして L_x 、内部スケールとして η が選ばれる⁴⁰⁾。当然、外部スケール (L_x 及び u' のマクロ・スケール) での無次元化は大きな渦を、一方内部スケール (η 及び $\nu \equiv (\nu\epsilon)^{1/4}$ の Kolmogoroff のマイクロ・スケール) は小さな渦をそれぞれ対象とした普遍的表示であり、 R_L が大きいほど慣性小領域は前者では高波数部へ、後者では低波数部へと拡大されることになる (Fig. 2・6 を参照)。もともと Kolmogoroff が展開した局所等方性理論は、流れの外的な影響を度外視したすなわち内部スケールによる普遍関数を対象としたものであり、この理論を検証する目的にはマイクロ・スケールによる無次元化表示が望ましいが、ここでは次の理由からマクロ・スケールによる無次元化表示を行う。

(1) 本研究では、乱れの微細構造よりむしろ乱れの発生機構に主眼をおいて現象論的な解明を試みている。

(2) 計測器類の性能上から高波数部を精度よく解析できない。すなわち、 $k\eta \sim 1$ まで解析するには $f \sim (2\pi\eta/h)^{-1} \cdot (U/h) \approx 60 (U/h)(H_z)$ となり、式 (4・1) よりさらに高周波数まで解析する必要があり、計測技術やデータ処理上からかなり困難となる。

(3) 発生小領域は式 (2・48) が成立する単一構造であったから、マクロ・スケール L_x が容易に評価でき、 $S_u(k)$ の無次元化が簡単である。

(4) 第 2・3 節の理論的考察は L_x による普遍関数を対象としたものであるから、その実験的検証にも同じ考慮が必要である。

さて、多数の測点で得られたスペクトル分布の膨大な実測値を能率よく処理するために、Fig. 4・21 で示したように電算機と連動した処理プログラムを開発し、その省力化に努めた。まず、式 (2・48) の妥当性が示されたから、この式が $k=0$ まで適用できると仮定して L_x を評価した。すなわち、 $L_x = (\pi/2) S_u(0) \dots\dots\dots (4\cdot42)$

しかし、三角形フィルターを併用した F・F・T 法でも $f=0$ 近傍のスペクトル解析は精度が劣り³⁹⁾ また式 (4・41) の凍結乱流の仮説の適用性や完全な単一構造と見なすことに疑問があるから、式 (4・42) で評価された L_x は単に概略値と考えられる。次に、無次元化表示の第 1 段階として式 (4・42) から評価された L_x を概略値として使い、 $S(k)$ が無次元化され、その結果は X-Y プロッターで両対数紙に図化された。

Fig. 4・22 は滑面乱流 (ケース A-1) における各領域の代表測点での結果であり、他の測点でもほとんど同じ結果であった。 R_L は各測点で若干異なるが、Fig. 2・6 で示したように少なくとも慣性小領域までの $S(k)$ は R_L の変化に鈍いから簡単に R_L を一定と見なしてよい。この場合、各測点でのほぼ平均値に当る $R_L = 500$ ($R_L \sim R_*$ となる)

を選び、第 2・3 節で得られた $S_u(k)$ の理論曲線 (Fig. 2・6) を図に併示した。各領域で得られた無次元化スペクトルの実験値はほぼ普遍的な変化特性を示し、また $R_L = 500$ の理論曲線と概ね良好に一致している。すなわち、慣性小領域までは実験値と理論曲線との一致はかなり良好であり、式 (2・48) の妥当性が再び確認できる。粘性小領域でも両者の一致は概ね良いが、 $L_x \cdot k \geq 70$ の実験値は理論曲線よりかなり大きく、ノイズ混入等の影響が現われていると考えられ、高波数部に重点をおいた解析は相当困難となろう。

同様に、Fig. 4・23 は粗面乱流 (ケース D-1) での結果であり、やはり普遍的な変化特性をほぼ良好に示している。壁面近傍の R_L は主流域より小さく、粘性小領域にはこの影響が若干現われているが、ほぼ全体的に $R_L = 500$ の理論曲線と良好に一致し、第 2・3 節で展開された理論的考察の妥当性を裏づけている。すなわち、 L_x で無次元化されたスペクトル分布には壁面粗度の影響がほとんど現われず、第 2・3 節の理論曲線がそのまま適用できる。

以上のように、Table 4・1(c) の比較的低流速の実験グループでは、式 (4・42) から評価された L_x の近似値は期待された以上に正確な結果を示し、良好な無次元化スペクトル分布が得られた²⁾

同様に、Fig. 4・24 は Table 4・1(b) の高速流グループで得られた壁面近く ($\epsilon \approx 0.18$) 及び自由水面近く ($\epsilon \approx 0.75$) での結果である。 $R_L \approx R_*$ であるから $R_L = 2000$ での理論曲線が併示された。各ケースの実験値は相互に重複し、普遍的な変化特性を示しているが、 $L_x \cdot k \sim 1$ では理論曲線より系統的に小さく、逆に $L_x \cdot k \sim 10$ では大きくて両者はあまりよく一致していない。しかし、 $-5/3$ 乗則で変化する慣性小領域の存在が確認されるから、上述の不一致は式 (4・42) による L_x の評価が不適当なためと考えられ、次のような L_x の修正を行う。

いま、 $-5/3$ 乗則が成立するとき、式 (2・47) から次式が成り立つ。

$$\tau_m \equiv C (\epsilon L_x / u'^3)^{2/3} = (S_u(k) / L_x) \cdot (k L_x)^{5/3} \dots\dots\dots (4\cdot43)$$

一方、式 (2・50) から

$$\tau_t \equiv C (\epsilon L_x / u'^3)^{2/3} = C \cdot K^{2/3} \dots\dots (4\cdot44)$$

式 (4・43) は 2・3・3 の「給水管」法、一方、式 (4・44) は「貯水池」法にほかならない。 L_x の値が正確ならば τ_m は τ_t に一致するが、 $\tau_m \neq \tau_t$ であれば Fig. 4・21 に示した解析処理手順に従って、まず $-5/3$ 乗則が成立する小領域区間で τ_m の実測値を読み取り、次に τ_m が理論値 τ_t に一致するように L_x を次式で修正すればよい。

$$\hat{L}_x \equiv L_x \cdot (\tau_t / \tau_m)^{3/2} \dots\dots\dots (4\cdot45)$$

式(4.44)で与えられる理論値 γ_L で、 C は Fig. 2・10 から約 0.5、 K は R_L の関数であり、Fig. 2・11 から決定できる。いま L_x の修正にともなう K の決定を容易にするために、第 2・3 節で得られた理論結果を再整理したものが Fig. 4・25 であり、この図から $R_L \geq 300$ では次の関数形が提案できる。

$$K = K_\infty + 3.98 R_L^{-1/2}, \quad K_\infty = 0.691$$

..... (4.46)

このようにして得られた修正値 \hat{L}_x を使って Fig. 2・24 を再表示した結果が Fig. 4・26 である。修正値 $\hat{R}_L \equiv \hat{L}_x u' / \nu$ はむしろ 1000 に近くなり、図には $R_L = 1000$ 及び 2000 の理論曲線を併示したが、ほぼ慣性小領域まで両者の差異はほとんどなく、この高速流グループの理論曲線と考えてよい。

さて、慣性小領域での実測値は F_r の変化にかかわらず普遍的变化特性を示し、理論曲線と良好に一致する。この特性は、Table 4・1(a)の R_e を変化させた実験グループでも同様に認められた。したがって、 $-5/3$ 乗則が成立する慣性小領域は R_e 、 F_r 及び壁面粗度といった流れの外的条件には左右されない普遍的なものと考えられ、これまでの理論展開の妥当性が確認できる。しかし、Fig. 4・26 で示された発生小領域の実測値は理論曲線とあまりよく一致せず、かえって修正前の Fig. 4・24 の方が良好な一致を示している。このように高速流グループの実験では、慣性小領域の $-5/3$ 乗則に注目してそのスペクトル分布を再整理した結果、発生小領域の実測値は理論曲線と若干差異を生じる結果となったが、この明確な原因は現在不明である。同様な差異は、Monin らが引用した近年の多くの実測データにも現われており、この原因として定性的には外的なエネルギー源の影響と考えられるが、定量的な結論を下すまでには至っていない⁴⁶⁾

このように発生小領域の特性には不明な点が多く、今後凍結乱流の仮説を使わずに低波数領域を正確に解析する手法を開発し、発生小領域の特性とりわけ多重構造性や inactive 成分の影響に関する系統的な研究が必要であろう。

4・6・3 逸散スペクトル及び局所等方性

逸散スペクトル $D(k) \equiv k^2 \cdot S(k)$ の特性や局所等方性の傾向を明らかにするには、可能な限り粘性小領域までの高波数部を解析しなければならない。前述のように、 R_L が大きな高速流グループでは慣性小領域が広がり、またスペクトルの解析精度に限界があつて、粘性小領域まで解析するには至らなかった。一方、 $R_L \approx 500$ の低速流グループでは -7 乗則が成立する終期粘性小領域までほぼ解析でき、また第 4・3 節において乱れ強度に及ぼす R_e や F_r の影響はほとんどなく、むしろ壁面粗度によってその等方化指向が強まる傾向が認められたから、以下では Table 4・1(c)の

実験のみに関して考察する。

まず、Fig. 4・27(a)及び(b)はそれぞれ滑面乱流及び粗面乱流における v 成分のスペクトル分布 $S_v(k)$ を示したものであり、Fig. 4・22 及び 4・23 の $S_u(k)$ に対応している。図には $R_L = 500$ の理論曲線、すなわち式(2.42)の等方性乱流の関係式を使って $S_u(k)$ の理論曲線から計算された結果を併示した。 $S_u(k)$ と同様に、 L_x で無次元化された $S_v(k)$ は壁面粗度に左右されないほぼ普遍的な特性を示すことがわかる。滑面乱流の $S_v(k)$ は $L_x \cdot k \geq 30$ で理論曲線と良好に一致し、粘性小領域では等方性乱流とみなしてよい。しかし、慣性小領域の実測値は理論曲線より系統的に大きく、厳密な局所等方性理論は成立していないものと考えられる。なお、発生小領域の実測値が理論曲線からかなりの差異を示すことから、この小領域では近似的にも等方性乱流とはみなせないことがわかる。

一方、粗面乱流の $S_v(k)$ は滑面乱流とほぼ同じ特性を示すが、等方性の関係は $L_x \cdot k \geq 20$ の粘性小領域でほぼ満足され、後者より若干広範囲にわたっている (\hat{L}_x を使えばより良好な一致が得られる)。明確な結論は下せないが、粗面乱流の方が等方性指向は若干強いと推測され、これは第 4・3 節の結果と矛盾しない。

次に、厳密な等方性乱流が成り立てば Reynolds 応力 $-\overline{uv}$ は常に零であり、そのスペクトル $S_{uv}(k)$ は任意の波数に対して $S_{uv}(k) \equiv 0$ となるが、開水路流などのせん断乱流では $-\overline{uv} \neq 0$ すなわち、Reynolds 応力の存在が本質的であり、 $S_{uv}(k) \neq 0$ である。しかし、せん断乱流の高波数部は次第に等方性乱流の関係を満足することが明らかにされたから、 $S_{uv}(k)$ の分布にもこの特性が把握できるはずである。 $S_{uv}(k)$ は (u, v) のコ・スペクトルであり、F・F・T法ではパワー・スペクトル解析に比べてかなり精度が悪く、この解析法に改善が望まれるが³⁰⁾ 演算時間が非常に短く、かつ演算法が簡便であることからここではとりえず、F・F・T法を使用した。^{*})

Fig. 4・28(a)及び(b)は滑面乱流及び粗面乱流で F・F・T法から得られた $S_{uv}(k)$ の実験値である。滑面乱流ではデータのばらつきが大きく、信頼性に乏しいが、 $S_u(k)$ の理論曲線と比較すれば Reynolds 応力 $-\overline{uv}$ には慣性小領域のかなりの部分までが寄与し、先述のように $L_x \cdot k \geq 30$ 程度になってはじめて $S_{uv}(k) \ll S_u(k)$ となり、確かに等方性乱流の特性が現われるといえる。一方、粗面乱流の $S_{uv}(k)$ は滑面乱流とほぼ同様であるが、粘性小領域における $S_{uv}(k)$ はほぼ零に近く、局所等方性が後者より若干良好に成立していると考えられる。

さて次に、 u 成分の逸散スペクトル $D_u(k) \equiv k^2 S_u(k)$

^{*}) F・F・T法では $S_{uv}(k)$ が負となる線スペクトルが現われることがあり、三角形フィルターを乗じてデータのはらつきは大きかった³⁰⁾ 新たなフィルター手法や ensemble 平均手法の開発や Blackman-Turkey 法あるいは M・E・M 法の適用性を今後検討する必要がある。

の分布特性に関して簡単に考察する。

$D_u(k)$ の分布形は測点位置 ε が増加するとほぼ相似形を保って小さくなるが、これを L_x で無次元表示すれば、Fig. 2・8で示したように R_L のみの関数となり、その面積は $(L_x/\lambda_x)^2$ に等しくなる。いま、 \hat{L}_x で無次元化された逸散スペクトル $D_u(k)$ を図示したものが Fig. 4・29である。慣性小領域 ($D_u(k) \sim k^{-1/3}$ の単調増加部分) までは R_L が多少変化しても理論曲線はあまり変わらず、この小領域までの実測値は $R_L = 500$ の理論曲線と良好に一致する。計測器類の性能限界から粘性小領域以上の解析精度は劣るが、この小領域に移ると $D_u(k)$ は緩やかに単調減少する。滑面乱流の実測値はむしろ $R_L = 400$ の理論曲線に沿って減少し、粗面乱流でもほぼ同様な減少特性を示すが、壁面近くで R_L が小さくなるために $R_L = (200 \sim 300)$ の理論曲線とよく合致するようである。

以上のように、粘性小領域の実測値は定性的には理論曲線に沿って変化するが、壁面近傍では理論曲線よりやや小さく、逆に自由水面近くではノイズの影響を受け易くて (u' が小さいから、 $N-S$ 比は悪化する) 若干大きくなるから、乱れの微細構造に関する定量的な結論づけにはさらに高精度のデータが必要であり、今後の検討としたい。

4・6・4 特性渦スケール間の関係

特性渦スケールにはマクロなものとミクロなものとがあり、前者は平均渦スケール L_x で、後者は Taylor のミクロスケール λ や Kolmogoroff のミクロスケール η でそれぞれ代表された。これらの特性スケールは乱れの構造を解明する上で非常に重要であり、以下にその考察を行う。

まず、Fig. 4・30は式(4・42)から評価した修正前のマクロスケール L_x と修正後のマクロスケール \hat{L}_x とを比較のために図示したものであり、1成分熱膜流速計から得られた結果である。一方、Raichlen (1967) は $S_u(k)$ の実測値を次の Dryden の式*)

$$S_u(k) = (2L_x/\pi) \cdot \{1 + (L_x \cdot k)^2\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 47)$$

に適合させて L_x の概略値を求め¹⁾ また McQuivey ら (1969) は式(4・42)から評価しており²⁾ これらの結果を図に併示した。修正前の実験値は若干ばらつきが大きいから、概略的な特性は把握できる。すなわち、 L_x の値は壁面近くで $\varepsilon \equiv y/h$ のほぼ $1/2$ 乗則で増加し、自由水面領域に入るとほぼ水深に等しい一定値となり、他の研究者の結果ともほぼ一致している。一方、修正後の \hat{L}_x は L_x に比べてばらつきがはるかに小さく、 F_r に無関係な普遍的特性を良好に

*) Dryden の式は、相関関数 $R_u(\tau) = \exp(-\tau/L_x)$ と仮定すれば τ が大きいとき実験値と良好に適合する¹⁾、式(2・45)から容易に得られる。 $L_x \cdot k \ll 1$ では式(4・47)は式(2・48)と一致するから、Raichlen の評価法は式(4・42)の方法とはほぼ同じである。

示し、Fig. 4・21の修正方法が妥当なものである。このとき、

$$\hat{L}_x/h = B \cdot \varepsilon^{1/2}, \quad (\varepsilon \leq 0.6 \text{ の平衡領域}) \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 48)$$

$$\hat{L}_x/h = B_3 \quad (\text{一定}), \quad (\varepsilon \geq 0.6 \text{ の自由水面領域}) \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 49)$$

がほぼ成立し、第2・4節の理論結果の妥当性が確認できる。普遍定数 B 及び B_3 はほぼ1であり、自由水面領域の \hat{L}_x は水深程度となって現象論的に妥当な結果といえる。同様に、Fig. 4・31(a)は2成分熱膜流速計から得られた \hat{L}_x の実験値であり、Fig. 4・30の1成分熱膜流速計からの結果と当然良好に一致する。したがって、壁面近傍のデータは1成分熱膜流速計から良好に補完できよう。

さて、Fig. 4・31(b)は粗度の影響を検討した低速流グループでの実験結果であり、上述の理由から壁面近傍では1成分熱膜流速計でデータを補完した。このグループでの L_x/h の変化特性は高速流グループの結果とほぼ同様であるが、 $\varepsilon \leq 0.1$ すなわち壁面領域で粗度の影響が顕著であり、 L_x^+ の y^+ 表示を行った結果、式(2・65)の普遍関数を良好に満たし、本実験の範囲内では滑面乱流で $A_2 \equiv 31$ 、粗面乱流で $A_2 \equiv 20$ となることが確かめられた²⁾。このように、粗面乱流になるとマクロ・スケール L_x が減少する特性は Englund (1969)²⁷⁾ Antonia ら (1971)²⁸⁾ Chen ら (1974)²⁹⁾ によっても見い出されており、また第4・3節でこれに関する現象論的な説明がすでになされた。

一方、平衡領域以上では粗度の影響は顕著でなく、式(4・48)及び(4・49)の普遍関数に従うものと考えられる。第2・4節や後述するようにエネルギー逸散率 $\varepsilon h/U_*^3$ は $\Phi(\varepsilon)$ なる普遍関数で表わされるから、式(2・50)より次式が得られる。

$$L_x/h = K \cdot (u'/U_*)^3 \cdot \Phi^{-1}(\varepsilon) \quad \dots\dots\dots (4 \cdot 50)$$

$u'/U_* = D_1 \cdot \exp(-\varepsilon)$ であるから、結局 $(L_x/h) K^{-1}$ は ε のみの関数となる。 K は R_L の減少関数であるから、高速流グループで $B = 1.0$ とすれば低速流グループでは $B = 1.1$ となり、両実験値の特性をよく示しているが、本実験の範囲内では $B \equiv 1$ と考えても大差ない。

次に、Taylor のミクロ・スケール λ_x の特性を検討する。等方性乱流ならば λ_x は式(2・43)で定義された λ と厳密に一致するが、せん断乱流では近似的に一致するにすぎない。 $\lambda_x \equiv u' / \sqrt{(\partial u / \partial x)^2}$ と定義されたから、 λ_x の評価法には次の3種類が考えられる³⁾

- (1) スペクトル法 逸散スペクトル $D_u(k)$ から $\lambda_x = \left[\int_0^{k\infty} D_u(k) dk \right]^{-1/2}$ で評価する方法。
- (2) 確率分布法 式(4・37)の $\partial u / \partial x = -U^{-1} \partial u / \partial t$ から、 $\partial u / \partial t$ を差分近似してその r.m.s. 値を求め、 λ_x を評価する方法。

(3) 零クロス法 u 及び $\partial u / \partial t$ が独立な2次元正規分布に従えば、単位時間当り零軸 $u = 0$ を横切る個数 N を数えて、 $\sqrt{(\partial u / \partial t)^2} = \pi N u'$ すなわち $\lambda_x = U / \pi N$ から評価する方法⁽⁸⁾

しかし、上述の評価方法にはそれぞれ致命的な欠陥があり、 λ_x の正確な値を決定することは困難である。すなわち、(1)の方法では粘性小領域を十分に覆う高波数成分まで $D_u(k)$ を正確に解析する必要があるが、計器類の性能限界からこれは相当困難であろう。実際、粘性小領域まで解析できた Fig. 4・29 には著しいノイズの影響が見られる。(2)の方法では A・D 変換のサンプリング間隔 Δt が有限であるため、差分近似 $\Delta u / \Delta t$ はかなりの誤差を伴うであろう⁽³⁾ このため、熱線流速計からの出力電圧を微分回路に実時間で導き、その r.m.s 値から λ_x を評価するアナログ方法がより望ましいが、本研究では採用しなかった。(3)の方法では、 u および $\partial u / \partial t$ が正規分布に従うという前提条件は近似的に成立するにすぎず、特に $\partial u / \partial t$ の正規分布特性に関しては疑問が多く、 λ_x の概略値しか期待できない^{(2), (9)}

いま、ケース A-1 を例にとり、上述の3つの方法で評価された λ_x の値を比較した結果（文献(7)の Fig. 6を参照）、各実験値は相互に若干ばらついたが、ほぼ実験誤差内で一致した⁽²⁾ λ_x の正確な値を決定することは今後の検討事項であるが、以下では(1)のスペクトル法から得られた実験値に着目して定性的な考察を行う。

Fig. 4・32 は高速流及び低速流グループで得られた λ_x の実験値を図示したものであり、ほぼ同じ大きさの R_e でスペクトル法から評価された従来の結果も併示した。(a)の高速流グループは $R_e \approx 3 \times 10^4$ の滑面乱流であり、その実験値は若干ばらついているが、 R_e の影響は見られない⁽⁸⁾ λ_x は ε に対して単調に増加し、自由水面領域でほぼ水深の1割に達するが、 L_x よりほぼ1オーダー小さい。

ところで、式(2・52)、(4・11)及び(4・48)から次式が得られる。

$$\frac{\lambda}{h} = C_1 \cdot \varepsilon^{1/4} \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad C_1 \equiv \sqrt{\frac{15B}{2.3KR_*}} \quad (4.51)$$

$\lambda_x \approx \lambda$ と近似し、 $B = 1.0$ 、 $R_* = 1600$ とおいた上式を図に実線で併示した。しかし、実験値は全体に式(4・51)より大きく、この理論曲線を平行移動したようにずれている。この原因は、高速流実験では慣性小領域までの解析しかできず、この場合必要な粘性小領域の逸散スペクトルが打ち切られるためにスペクトル法による λ_x はかなり過大に評価されるためである。いま、Fig. 2・8の理論曲線を使い、逸散スペクトルの全波数領域にわたる積分値に対する慣性小領域までの積分の割合 Q を計算すると、 $R_L = 1000$ で $Q = 0.26$ 、 $R_L = 2000$ で $Q = 0.28$ となり、 λ_x の真値に対してそれぞれ $Q^{-1/2} = 1.96$ 、 1.89 倍だけ過大に評価さ

れることになる。すなわち、このグループでは約2倍弱も λ_x は過大評価されていると考えられ、実際この実験値は理論値よりこの程度大きくなっていることが確認できる。Raichlen (1967)の結果も上述の実験値とほぼ同程度に理論曲線からずれているが⁽¹⁾ これも逸散スペクトルが十分に積分されていないためであろう。一方、Laufer (1954)による気流実験の結果はかなり理論曲線に近いが⁽¹⁵⁾ これは熱線流速計を用いたために高波数成分 ($5 \sim 7 KH_z$ 程度) までの計測が可能となり、かなり満足すべき逸散スペクトルが得られたためである。このように、本実験の高速流グループでは粘性小領域の打ち切りのために λ_x/h の実験値は全体的に理論値より2倍弱大きい⁽¹⁾、定性的な変化特性はよく合致し、

$$\lambda_x/h = C_2 \varepsilon^{1/3} \quad (4.52)$$

なる1/3乗則にはほぼ従うようである。比例定数 C_2 を決定するまでには至らないが、 L_x/h が ε の1/2乗則に従うことと比較し、この1/3乗則特性は注目すべき結果である⁽⁸⁾

次に、(b)の低速流グループ ($R_e \approx 1 \times 10^4$) は粘性小領域までほぼ解析されたから、この実験値は $R_* = 600$ の理論曲線式(4・51)とかなり一致し、また McQuivey (1969)の結果ともよく一致する⁽²⁾ 壁面の近くでは粗面乱流ほど λ_x/h は小さくなるようであるが、実験値のばらつきがやや大きく、またデータ数も少なく明瞭な結論を下すまでには至らない(粗度によって L_x/h 及び u'/U_* が共に減少するから、理論式(4・51)に及ぼす粗度影響は小さいであろう)。なお、自由水面領域で理論曲線が実験値より若干大きいのは式(4・48)を使ったためであり、式(4・49)を使えば改善されよう。

次に、ミクロとマクロとのスケール比 L_x/λ_x を検討したものが Fig. 4・33 である。式(2・52)と式(4・46)とから

$$\frac{L_x}{\lambda} = \sqrt{\frac{KR_L}{15}} = \sqrt{\frac{R_L}{15}} (K_{\infty} + 3.98 R_L^{-1/2}) \quad (4.53)$$

が得られ、図に実線で示されるが、 R_L に対する K の変化は小さく、 L_x/λ は $\sqrt{R_L}$ にほぼ比例して単調増加する。実験値はかなりばらつくが、低速流グループでは不十分ながらも粘性小領域まで解析できたから、式(4・53)の理論曲線にのる傾向が見られる。一方、高速流グループでは逸散スペクトルの積分上限が比較的低波数で打ち切られたために、 L_x/λ_x の実験値は理論曲線より系統的に小さくなり、5割弱も過小に評価されている。

最後に、Kolmogoroff のミクロスケール η は式(2・44)で定義された内部パラメータであり、 ν が一定であればエネルギー逸散率 ε の特性をそのまま表わしている。したがって、 η の実験値を図示しても特別注目すべき結果は得られないから、以下では滑面乱流を例にとり、特性渦スケール

L_x , λ 及び η の関係を定性的に考察してみる。

まず, L_x/h の変化特性は式 (4.48) で近似でき, Fig. 4.34 に示されるが, 簡単のために自由水面領域までこの式を延長した。また, R_L/R_* は式 (4.11) 及び (4.48) から

$$R_L/R_* = 2.3 \sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon) \dots\dots\dots (4.54)$$

となり, 図に示したように主流部では $R_L \sim R_*$ であることがわかる。

次に, Taylor のマイクロ・スケール λ は式 (4.51) から計算され, Kolmogoroff のマイクロ・スケール η は式 (2.44) から次式で計算できる。

$$\eta/h = R_*^{-3/4} (\varepsilon h/U_*^3)^{-1/4} = K^{-3/4} R_L^{-3/4} \cdot (L_x/h) \dots\dots\dots (4.55)$$

$R_* = 600$ 及び 1600 に対する計算結果を図示した。特性渦スケールは壁面の拘束条件を受けて壁面に近づくほど単調に減少するが, 特性スケールがマイクロになればなるほどその拘束条件から次第に解放され, 内部パラメータとなることがわかる。すなわち, L_x/h は $1/2$ 乗則に, λ/h は $1/3$ 乗則にそして η/h は $(1/4 \sim 1/6)$ 乗則にほぼ従うようである。

もう一つの注目すべき特徴として, ミクロスケールになるほどその水深 h との相対的な大きさは $R_* (\sim R_L)$ の影響を受け易い点が挙げられる。これは, 水深もマクロ・スケールの一種であるから, R_* が大きいほどマクロに対するミクロのスケール比は増大し, 慣性小領域がより広範囲に存在することを示すものにほかならない。しかし, Fig. 4.34 で示すように本実験の範囲内では L_x と λ 及び λ と η の比はたかだか 1 オーダ程度であり, このことから厳密な慣性小領域の存在は期待できない。一方, 実河川での R_L は 10^6 以上になることはしばしば見られ, この場合 $L_x/\lambda \geq 215$, $L_x/\eta \geq 2.9 \times 10^4$ となるから, かなり厳密な慣性小領域が存在することとなる。したがって, Monin らをはじめ多くの研究者が指摘しているように, Kolmogoroff の局所等方性理論を厳密に検証するためには大気乱流, 海洋乱流, 河川乱流などを対象とした現地実験から行う必要があることがこれからも確認できる。

また, 特性渦スケールと比較するために式 (2.77) の混合距離 l/h が図に併示された。混合距離は Reynolds 応力と平均流渦度とを結びつけるマクロ・スケールであるが, その大きさ自体はミクロ・スケール程度であることがわかる。渦自体のスケールと, 隣接する渦同志の平均間隔と考えられる混合距離とは本来別個の概念であり, 上述のように相互の大きさは必ずしも一致しないが, 現象論的にいって両者間に相関があることは確かである。

第 4・7 節 乱れエネルギーの収支関係

第 2 章で論じたように, 乱れの物理機構の説明にはまず乱れエネルギーの収支関係を明らかにすることが不可欠であると早くから指摘され, 例えば Laufer (1951, 1954) による管路流での収支関係¹⁵⁾,²⁸⁾ や Townsend (1956) による境界層流での収支関係²⁹⁾ などがその代表的な研究成果としてたびたび引用されてきた。一方, 開水路流における乱れエネルギーの収支関係を明らかにしようとする研究は上述の気流実験よりはるかに遅れ, 著者の知る限り 1969 年になって初めて McQuivey らによってその初歩的な研究が行われたにすぎず²⁾ その本格的な研究は恐らく著者らのもの (1975) が最初であろう⁷⁾。

本節は, この研究成果とその後新たに得られた高速流での実験結果に基づいて³⁾ 乱れエネルギーの収支関係を改めて考察しようとするものである。

4・7・1 乱れエネルギーの逸散率

2・3・3 で提案された逸散率 ε の評価法には (A) 「貯水池」法, (B) 「給水管」法及び (C) 「蛇口」法の 3 種類があり, 前節までの実験結果を考慮すれば各評価法の優位性は次のようである。

(A) 「貯水池」法 Fig. 2・9 で示したように, この方法ではマクロ・スケール L_x を正確に決定することが基本である。 L_x の値は式 (4.42) からあるいは相関関数を直接積分して独自に評価されるが, その精度は一般に劣り, 特に高速流グループではかなり過大に評価された。式 (4.48) のように L_x の普遍関数が既知であれば, ε の変化特性を計算できるが, L_x の評価自体に改良すべき問題が多く, この方法では精度よい ε の値を決めることは困難であろう。

(B) 「給水管」法 $R_L \sim 500$ の低速流グループでも慣性小領域が近似的に存在し, $-5/3$ 乗則が成立したから, 式 (4.43) から逸散率 ε が評価できる。しかし, 両対数表示されたスペクトル分布形から r_m の値を読み取るのに多少の誤差は避けられず, $\varepsilon \sim r_m^{3/2}$ であるから 10 % の読み取り誤差でも ε に 15 % の誤差を与えてしまう。

(C) 「蛇口」法 (A) 法とは対比的に, ミクロ・スケールから評価する方法であり, λ が λ_x で近似できれば式 (2.43) から ε は容易に決定できる。しかし, 上述の等方化近似に疑問の余地があり²⁸⁾ またこの近似が許されても先述のように λ_x 自体の評価に誤差が伴い易く, ε の正確な値を決めることは困難である。等方化近似による誤差を改良するために, Laufer (1954) は ε の定義式 (2.24) における合計 9 項の $(\partial u_i / \partial x_j)^2$ のうち 5 項までを実測し¹⁵⁾ また著者ら (1975) は 3 項までを実測してそれぞれ等方化近似の程度を検討した⁷⁾。

以上から, (A) 法では L_x が, (B) 法では慣性小領域のスペクトル分布が, (C) 法では λ_x がそれぞれ正確に与え

られねばならない。前節で示したように、高速流の場合には L_x 及び λ_x の評価に相当大きな誤差を伴うから、この場合 (A) 及び (C) 法は妥当でない。しかし、低速流グループでの L_x 及び λ_x の値は比較的信頼でき、上述の各方法から得られた ε の実験値の比較検討が文献(7)の Fig. 7 及び 15 でなされている。これら 3 つの方法に普遍的な優位性を与えることはさらに検討を要するが、以上の結果やスペクトル分布に明確な $5/3$ 乗則が成立したことを考慮すれば (B) 法が最も優れていると考えられる。⁷⁾ このことは Grant ら (1962)⁵⁶⁾、Bradshaw (1967)⁵³⁾、Lawn (1971)⁵⁷⁾ などによっても指摘され、特に Lawn は Laufer の管路流実験を追試し、(B) 法と (C) 法とを詳細に比較検討して (B) 法の優位性を結論している。⁵⁷⁾ したがって、本研究では (B) 法を一貫して採用し、以下のように逸散率 ε を評価した。

Fig. 4・35(a)及び(b)はそれぞれ高速流及び低速流グループにおける逸散率 ε を平衡領域以上の主流域に注目して無次元表示した結果である。また、管路流の Laufer や Lawn の実験結果、境界層流の Townsend のものを引用して図(b)に併示した。^{15), 55), 57)} 実験値には若干ばらつきが見られるが、高速流及び低速流グループの $\varepsilon h/U_*^3$ の値はほぼ同じ変化特性を示し、 F_τ 、 R_τ 及び壁面粗度といった外的な水理条件にほとんど左右されない普遍的な特性を示している。とりわけ壁面粗度の変化によっても逸散率 $\varepsilon h/U_*^3$ がほぼ普遍的な特性を保持することは注目すべき結果であり、乱れ強度 u'/U_* やマクロ・スケール L_x/h と比較してより普遍的な性質が強いものと考えられ、乱れ特性値のうち最も基本的なものと仮定して議論を進めた第2・4節の考察が妥当であると確認できる。 $\varepsilon h/U_*^3$ は壁面近くで非常に大きく、 $\xi = 0.1$ で約 20 をとるが、 ξ の増加と共に急激に減少して $\xi = 0.8$ で約 1 となり、大まかにいって壁面領域の逸散率は自由水面領域での値より 100 倍近くも大きい。管路流や境界層流での結果も開水路流とはほぼ同じ変化特性を示し、平衡領域までは相互によく一致しているが、自由水面領域では管路流の結果は開水路流や境界層流より系統的にやや大きくなる。この差異の原因を明確にするにはさらに精度よいデータを必要とするが、逸散率に関する限り開水路流の自由水面近くは管路流よりむしろ境界層流と類似した変化挙動を示すことが認められる。

以上のように、 $\varepsilon h/U_*^3$ の普遍特性変化が明らかとなったから、次にこの普遍関数表示を検討する。

まず、第2・4節で得られた結果を再記すれば次のようである。

$$\varepsilon \nu / U_*^4 = A_1 (y^+)^{-1} \quad (\text{壁面領域}) \cdots (2.64)$$

$$\varepsilon h / U_*^3 = B_1 (\xi' + B_2) \quad (\text{自由水面領域})$$

$$\cdots (2.70)$$

$$\varepsilon h / U_*^3 = C_1 (1 - \xi)^{3/2} \xi^{-1} \quad (\text{平衡領域})$$

$$\cdots (2.78)$$

平衡領域で成立する式 (2.78) を図に実線②で示すが、普遍定数 C_1 を約 3.0 に選べば実験値と比較的良好に一致することが確認できる。次に、自由水面領域で成立する式 (2.70) を破線③で示すが、普遍定数として $B_1 = 5$ 及び $B_2 = 0.1$ と選べば実験値との一致は良好である。

このように第2・4節の理論結果には矛盾はないが各領域ごとに別個の普遍関数で逸散率を表示することは実用上繁雑となるから、共通した普遍関数を提示することが望まれる。この目的には、 u'/U_* として式 (4.11) 及び L_x/h として先述の (B) 法から得られた式 (4.48) を用い、式 (2.50) から次式が得られる。

$$\frac{\varepsilon h}{U_*^3} = K(R_L) \cdot \frac{12.2 \exp(-3\xi)}{B\sqrt{\xi}} \cdots (4.56)$$

高速流グループでは $R_* = 1600$ 、 $B = 1.0$ 、また低速流グループでは $R_* = 600$ 、 $B = 1.1$ とおき、式 (4.46) と (4.54) とから $K(R_L)$ が決定され、式 (4.56) の結果が実線①で併示された。自由水面領域では L_x/h として式 (4.49) を使うべきであり、確かに式 (4.56) は実験値よりやや小さめとなるが、上述の実用目的には問題ないと考えられる。図から明らかなように、壁面領域の一部をも含む主流域（ほぼ全領域に当る）で普遍関数式 (4.56) は実験値と非常に良好に一致し、その実用価値は十分に高いと考えられる。また、この主流域では R_L に対する K の変化は小さく、高速流及び低速流グループでも式 (4.56) の曲線はほぼ同一となり、先述の R_τ に対する逸散率の普遍的な特性を如実に示している。

最後に、 y^+ で表示すべき壁面領域に焦点を当て、逸散率の特性を簡単に考察する。Fig. 4・36 は壁面領域における逸散率 ε を $\varepsilon^+ \equiv \varepsilon \nu / U_*^4$ で表示したものであり、主として 1 成分熱膜流速計から得られた結果である。本実験では粘性底層内のデータは得られなかったが、Laufer (1954) は $y^+ \leq 10$ の底層内に及び壁面のごく近傍での実測に成功し¹⁵⁾ 図にはその実験結果も比較のため併示した。 ε^+ の実験値は若干ばらついているが、ほぼ普遍的な特性を示している。粘性底層端 $\delta_\tau^+ (= 10)$ 付近で逸散率 ε^+ は最大に達し、その後 y^+ の増加と共に単調に減少するようである。図には式 (4.56) 及び (2.78) の理論曲線をそれぞれ実線①及び②で表示した。実験値はこの両理論曲線の間でばらつくが、②の理論曲線の方に近い。これは、 $y^+ < 50$ で式 (4.11) すなわち式 (4.56) の前提条件が崩れるからである。一方、式 (2.78) は R_* が十分大きいとき ε^+ は C_1/y^+ に収束するから壁面領域の普遍関数である式 (2.64) と一致し、ほぼ粘性底層端近くまで良好に成立すると考えられる。この場合普遍定数 A_1 は C_1 と一致せねばならず、 $A_1 = C_1 = 3.0$ となるが、後述する理由から $A_1 = (2.0 \sim 2.5)$ と考えられ⁷⁾ その正確な値の決定にはさらに検討が必要である。

以上のように、 $y^+ > 10$ の壁面領域での逸散率 ε^+ は式 (2・64) の y^+ の -1 乗則で良好に表現されるものと考えられる。

4・7・2 乱れエネルギーの発生率及び

拡散率

乱れエネルギーの発生率 P は $P \equiv -\overline{uv} \partial U / \partial y$ で定義されるから、Reynolds 応力と平均流速とを実測すれば容易に評価できる。平衡領域以上の主流域では平均流速は式 (2・14) で、Reynolds 応力は式 (4・20) でそれぞれ表わされるから、発生率 P は次式で与えられる。

$$\frac{Ph}{U_*^3} = \left(1 - \varepsilon - \frac{1}{\kappa R_* \varepsilon}\right) (\kappa \varepsilon)^{-1} \dots (4・57)$$

したがって、発生率 P の実験値 ($\partial U / \partial y$ は図解によって得られた) と上式との適合性は平均流速や Reynolds 応力の測定精度に支配され、Fig. 2・19 や 4・11 からこの適合性は確認できる。¹⁷⁾ P の実験値は後述する Fig. 4・38 や 4・40 に示されているが、その変化特性は前述の逸散率 ε とほぼ類似していることがわかる。

さて、第2章で予測されたように壁面領域における乱れエネルギーの発生率 $P^+ \equiv P\nu/U_*^3$ を明らかにすることは、第5章で論じる乱れ発生機構や広い意味でのせん断乱流の物理機構の解明に不可欠である。しかし、再三述べたように本実験では壁面領域の発生率 P^+ を十分に実測できなかったから、以下では van Driest の式 (2・13) から計算される発生率 P^+ の理論曲線について考察することとし、これを Fig. 4・36 に破線③で併示した。 P^+ は R_* にほとんどよらない普遍特性を示し、逸散率 ε^+ と同様に粘性底層端で最大値をとっている。Fig. 2・2 で示したように、 $y^+ \approx 10$ の粘性底層端で $E^+ \approx P^+$ であったから、この底層端では乱れエネルギーの発生率 P 、逸散率 ε 及び直接熱逸散率 E の三者はほぼ等しくなり、しかも前者二つはここで最大値をとるものと考えてよい。 $y^+ \leq 10$ の粘性底層内では $E > \varepsilon > P$ すなわちエネルギー不足領域に、 $10 < y^+ < 30$ の buffer 層では $P > \varepsilon$ の乱れエネルギー過剰領域にそれぞれ相当しているが、 $30 < y^+$ の対数則領域では乱れの発生率 P はその逸散率 ε にほぼ等しく、いわゆる動的平衡状態に達しているようである。第2・4節では壁面領域を乱れエネルギーの過剰領域と大まかに区分したが (Fig. 2・13 参照)、Fig. 4・36 で見る限り壁面領域の一部は乱れエネルギーの平衡状態にあり、平衡領域の特性がある程度重複していると考えられる。 R_* が大きいとき、 $y^+ > 30$ で壁面領域の式 (2・64) と平衡領域の式 (2・78) とは次式のように接続し、また発生率 P^+ は式 (4・57) から次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^+ &= C_1 (1 - y^+/R_*)^{3/2} / y^+ \doteq C_1 / y^+ = A_1 / y^+ \\ P^+ &= \kappa^{-1} (1 - y^+/R_*) / y^+ \doteq (\kappa^{-1}) / y^+ \end{aligned} \right\} \dots (4・58)$$

したがって、 $P^+ \geq \varepsilon^+$ であるから $A_1 \leq \kappa^{-1} = 2.5$ となることがわかる。

次に、第2・2節で定義した乱れエネルギーの拡散率 $T_r \equiv \overline{q^2 \nu} / 2$ に関して考察する。本実験では ν と w との相関は計測されず、 T_r の正確な値を決定するまでには至らないが、Laufer の実験結果によれば $\overline{w^2 \nu} \approx \overline{u^2 \nu}$ が成立するから次の近似評価が許されよう。

$$T_r \equiv \frac{\overline{q^2 \nu}}{2} \doteq \frac{(\overline{u^2} / 2 + \overline{w^2}) \nu}{2} \dots (4・59)$$

Fig. 4・37 は高速流及び低速流グループの拡散率 T_r を上式から評価した結果である。また、Laufer 及び Lawn による管路流での実験値を併示したが、両者は共にアナログ手法から解析されたものである^{15), 57)} 拡散率 T_r は速度変動の3重相関であるから2重相関である Reynolds 応力に比べてその計測精度は劣り、実験値には若干大きなばらつきが見られる。しかし高速流グループのはらつきは系統的なものではなく、 T_r の値は F_r にほとんど影響されない普遍的特性を示すものと考えられる。このグループの壁面近傍での T_r の実験値は得られず、不明な点が多いが、 ε が大きくなると T_r は増加して、平衡領域の中央部ではほぼ一定となり、自由水面領域に移って単調に減少して水面で零になるものと考えられる。この変化特性は Lawn の結果とよく一致するが、Laufer の結果とは自由水面領域以外で明白な差異を示している。Laufer 自身が認めているように、彼が用いたアナログ手法には改良が必要であって、特に低い方の R_* での実験結果 (破線①) は精度が悪いようである¹⁵⁾ 一方、Lawn はこのアナログ手法を改良して T_r を実測し、拡散率 T_r / U_*^3 は R_* によらない普遍的特性を示すことを明らかにした⁵⁷⁾ 以上のことから、Laufer の実験曲線①と②との差異は R_* の変化というより計測上の誤差と見なした方が妥当であり、Lawn や本実験の結果から T_r / U_*^3 は R_* に対してもほぼ普遍特性を示すことが認められる。

一方、Fig. 4・37(b) の低速流グループの実験値も同様にはばらつくが、 T_r / U_*^3 には壁面近くで粗度の影響が系統的に現われている。²⁾ この変化特性を見やすく、また乱れエネルギーの拡散率 $T \equiv \partial T_r / \partial y$ を評価するために、実験値をほぼ連ねる実験曲線が描かれている。大略の変化特性は高速流グループと同様であるが、粗度が大きくなると T_r の最大値は次第に減少し、かつ平坦になって、その最大位置も壁面から次第に離れるようである。²⁾ 粗面乱流ほど壁面近くで T_r は負の値をとり、この粗度影響はほぼ平衡領域の中央部まで達している。このように、拡散率 T_r / U_*^3 は

R_e や F_r には普遍的であるが、壁面粗度の影響を顕著に受ける結果を示し、第2・5節の推測が妥当であるといえる。しかも、第2・6節の結果によれば拡散率 T_r は乱れ発生機構に密接に関与するから、この発生機構にも粗度の影響が顕著に現われるものと予測され、第5章で詳細に検討される。

以上の結果から、自由水面領域の拡散率 T_r は粗度の影響をまったく受けないといえるから、その普遍関数表示が可能となり、第2・4・3節の理論結果に基づいて検討する。Zagustinの仮説と式(2・75)から次式が得られる。

$$\frac{T_r}{U_*^3} \equiv \left(\frac{B_1}{B_5} \right) \frac{d\ell}{dy} = \left(\frac{B_1}{B_5} \right) \kappa \xi' \{ \xi' + 2B_0(1 - \xi') \} \quad (4.60)$$

ここで、 $B_5 = 2\kappa/(1 + 2B_2)$ 及び $B_0 = B_2/(1 + 2B_2)$ であり、前節の結果によれば $B_1 = 5$ 及び $B_2 = 0.1$ であるから、次式が得られる。

$$T_r/U_*^3 = \xi'(5\xi' + 1)/2 \quad (4.61)$$

式(4.61)は自由水面領域の前提条件である $T \equiv \partial T_r / \partial y \equiv -\epsilon$ を当然満足している。Fig. 4・37に式(4.61)を実線③で併示した。この曲線は実験値とほぼ一致し、 $T = -\epsilon$ の関係式が崩れる平衡領域近くまで拡散率 T_r の普遍関数曲線として妥当であると考えられる。

4・7・3 乱れエネルギーの収支関係

前節までの研究で乱れエネルギーの発生率 P 、逸散率 ϵ 及び拡散率 T_r が明らかにされたから、これらの特性値間の相互関係すなわち乱れエネルギーの収支関係を論ずることができる。第2・2節の理論結果によれば、 R_* が十分大きいとき乱流の主流域で次式が成立する。

$$\frac{Ph}{U_*^3} = \frac{\epsilon h}{U_*^3} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{T_r}{U_*^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{R}{U_*^3} \right) \quad (4.62)$$

ところで、前節までの実験結果から発生率 P 及び逸散率 ϵ の実験値は比較的高精度で得られたが、運動エネルギーの拡散率 $T \equiv \partial T_r / \partial y$ の実験値は相当誤差を伴っているものと予想される。圧力エネルギーの拡散率 $R' \equiv \partial R / \partial y$ については現在でもその計測が極めて困難であり、本研究では式(4.62)に基づく次式の関係から間接的に評価する。

$$R' = P - \epsilon - T \quad (4.63)$$

当然、 R' の値には式(4.63)の右辺の各項の誤差が混入するから、その定量的評価には特に慎重を要するであろう。

さて、発生率 Ph/U_*^3 及び逸散率 $\epsilon h/U_*^3$ は R_e 、 F_r 及び壁面粗度にはよらない普遍的特性を示したが、拡散率 T は粗度に影響されるから、以下では低速流グループを例にとつてそれらの収支関係を考察してみよう。まず、Fig. 4・

38は滑面乱流における乱れエネルギーの収支関係を示したものであり、その特性はLauferによって得られた管路流での実験結果とほぼ同じである¹⁵⁾。 ξ が(0.6～0.7)になるまで乱れエネルギーの発生率 P はその逸散率 ϵ にほぼ等しく、また壁面近くを除いて乱れの運動エネルギーの拡散率 T は相対的に小さく、いわば副次的な寄与しかせず、概ね圧力エネルギーの拡散率 R' と釣り合っている。 ξ が約0.7以上の自由水面領域では乱れの発生率はほぼ零となり、このため乱れエネルギーの逸散率は運動エネルギーの拡散によってほぼ随われ、一方圧力エネルギーの拡散はほとんど寄与していないと理解できる。すなわち、この領域は $\epsilon > P \approx 0$ となる乱れエネルギーの不足領域であり、 $\epsilon \approx -T$ 及び $R' \approx 0$ が成立するが、これらの結果は第2・4・3節での理論的展開の前提条件であった。

このように、乱流場の主流域ではその上層部に当たる自由水面領域での乱れエネルギーの不足分は下層部(壁面側)からの乱れエネルギーの拡散 T によって補給され、一方残りの主流域では乱れの発生と逸散とが釣り合い、その結果 $T + R' \approx 0$ となるエネルギーの平衡状態が成立する。この平衡状態特性は、乱れの発生がすぐにその逸散に直結するというものではなく、両者間には複雑な物理機構が内在し(Fig. 2・5を参照)、この釣り合いはあくまでも動的なものと考えられ、上述したような自由水面領域に向う乱れエネルギーの流れが存在しなくてはならない。すなわち、式(4.62)から

$$0 \equiv \int_0^h (P - \epsilon) dy \equiv \underbrace{\int_0^{y_1} (P - \epsilon) dy}_{\text{壁面領域}} + \underbrace{\int_{y_1}^{y_2} (P - \epsilon) dy}_{\text{平衡領域}} + \underbrace{\int_{y_2}^h T dy}_{\text{自由水面領域}}$$

の関係が成立するから、

$$\int_0^{y_1} (P - \epsilon) dy \equiv \int_{y_2}^h (-T) dy > 0 \quad (4.64)$$

が得られる。したがって、 $(0, y_1)$ の壁面領域は $P > \epsilon$ となる乱れエネルギーの過剰な領域であり、Fig. 2・13で示したように乱れエネルギーの流れが存在するであろう。本実験では肝心の壁面領域における乱れエネルギーの収支関係を測測できなかったが、Fig. 4・36で示されたようにbuffer層は確かに乱れエネルギーの過剰領域であった。この点をさらに明確にするために、Lauferによって得られた実験値を引用し¹⁵⁾ 壁面領域での乱れエネルギーの収支関係を簡単に考察する。

いま、壁面領域での乱れエネルギー式は式(2・28)から次のようになる。

$$\frac{P\nu}{U_*^4} = \frac{\varepsilon\nu}{U_*^4} + \frac{T\nu}{U_*^4} + \frac{R'\nu}{U_*^4} - \frac{\partial^2}{\partial y^{+2}} \left(\frac{\overline{q^2}}{2U_*^2} \right) \quad (4.65)$$

粘性応力による仕事率 $V_T \equiv -\partial^2(\overline{q^2}/2U_*^2)/\partial y^{+2}$ は R_* が大きいとき主流域で無視できたが、壁面領域とりわけ buffer 層以下では粘性応力が重要となるから V_T は無視できない。実際、壁面近傍で流速成分を Taylor 展開すれば、

$$u = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 y + O(y^2), \quad v = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)_0 y^2 + O(y^3), \quad w = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 y + O(y^2) \quad (4.66)$$

であるから、次式が得られる。

$$\frac{\overline{q^2}}{2U_*^2} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right)_0^2 + \left(\frac{\partial w^+}{\partial y^+} \right)_0^2 \right\} y^{+2} + O(y^{+3}) \quad (4.67)$$

Hinze(1975)によれば³⁸⁾ $\sqrt{(\partial u^+/\partial y^+)^2} \approx 0.3$ 及び $\sqrt{(\partial w^+/\partial y^+)^2} \approx 0.1$ であるから、上式は次のようになる。

$$\overline{q^2}/2U_*^2 \approx 0.05 y^{+2} + O(y^{+3}) \quad (4.68)$$

したがって、壁面のごく近傍では $V_T \approx -0.1$ となり、Fig. 4・36 の結果と比較すれば V_T は発生率 P^+ や逸散率 ε^+ と同程度であることがわかる。

以上の考察から、壁面領域における乱れエネルギーの収支を検討するには少なくとも発生率 P 、逸散率 ε 、拡散率 T 及び粘性応力の仕事率 V_T を実測せねばならず、この計測に成功した Laufer による実測値を Fig. 4・39 に示した。なお、圧力エネルギーの拡散率 R' は Fig. 4・38 と同様に式 (4.65) の剰余として評価された。先述の理由から、 T 、 R' 及び V_T の各項は P や ε に比べて相当誤差を伴っていると考えられるが、Fig. 4・39 から壁面領域でのこれらの収支関係を明らかにすることができる。巨視的にみれば、乱れ発生率 P と逸散率 ε とは釣り合い、運動エネルギーの拡散率 T と粘性応力の仕事率 V_T との和は圧力エネルギーの拡散率 R' と釣り合っている。詳細に論ずれば、粘性底層は乱れエネルギーの不足領域 ($P < \varepsilon$)、buffer 層は過剰領域 ($P > \varepsilon$)、残りの対数則領域はほぼ平衡な領域 ($P \approx \varepsilon$) であるといえる。粘性底層内の乱れエネルギー不足分は、その底層端付近 ($y^+ \approx 10$) で主として圧力エネルギーの拡散 ($R' < 0$) によって補給されると考えられ、粘性底層内といえども速度変動は存在するという Einstein ら (1956) の初期の観察結果と符合するものである。すなわち、buffer 層での乱れエネルギーの過剰分は粘性底層での不足分を補うために圧力

エネルギーの拡散 ($R' < 0$) によって、また自由水面領域での不足分を補うために運動エネルギーの拡散 ($T < 0$) によってそれぞれ壁面側及び自由水面側へと流れて行き、乱れエネルギーの収支が保たれているものと考えられる。

次に、粗面乱流での乱れエネルギーの収支関係を示したものが Fig. 4・40 である。変化特性は Fig. 4・38 の滑面乱流とほぼ同じであるが、滑面乱流の結果と詳しく比較すれば拡散率 T 及び R' に粗度の影響が現われている。すなわち、運動エネルギーの拡散率 T が損失 ($T > 0$) から利得 ($T < 0$) に転ずる $T = 0$ の位置は粗面乱流ほど壁面から離れるようである。これは、Fig. 4・37 で示した T_r の特性にほかならないが、壁面粗度のために攪乱渦は崩壊され易く、より等方的な乱れが生じて、これが自由水面側へ後流状に拡散して行くためとも考えられる。粗面乱流においても自由水面領域の不足分を補うために擬似壁面領域は乱れエネルギーの過剰領域でなければならない。この領域での収支関係は現在不明のままであるが、もはや buffer 層は存在せず、式 (2・88) で示された粗度頂部での仕事率 $U_0 U_*^2$ がこれに替わる役割を果たしているものと考えられる。滑面乱流では粘性底層へ圧力の拡散 ($R' < 0$) によってエネルギーが補給されたが、粗面乱流でも同様に粗度頂部で生じたエネルギー $U_0 U_*^2$ の一部が圧力の拡散 ($R' < 0$) によって粗度粒子間の死水溝へ補給されると共に、残りのエネルギーは自由水面領域の不足分を補うために運動エネルギーの拡散 ($T < 0$) によって自由水面側へと流れるものと推測される。いずれにせよ、壁面近傍における乱れの発生機構は滑面乱流と粗面乱流とで明らかに異なると考えられるが、粗面乱流での発生機構は現在でもまったく不明であるといっても過言ではなく、この機構を解明する糸口を第 5 章で検討することとする。

最後に、実験データに比較的信頼が持たれた乱れエネルギーの発生率 P とその逸散率 ε との関係を検討する。Fig. 4・41 は発生率と逸散率との関係を $(P - \varepsilon)/\varepsilon$ の形で表示したものであり、 $\varepsilon \leq 0.2$ では座標目盛を 2 倍に拡大して壁面近くを見やすく表わした。実験値はややばらついているが、 $|P - \varepsilon|/\varepsilon$ は平衡領域で (0.2 ~ 0.3) のほぼ一定値を示し、自由水面領域に至って増大し、自由水面でほぼ 1.0 となす。第 2 章では $|P - \varepsilon|/\varepsilon \leq 0.2$ を満足する領域を平衡領域と定義し、 $\varepsilon \leq 0.6$ がその上限であるという結果を得たが、このことは Fig. 4・41 から高速流及び低速流グループいずれについてもいえる。発生率 P は式 (4.57) で、逸散率 ε は式 (4.56) で計算された曲線を実線①で記入し、また逸散率として式 (2.78) を用いて計算されたものを破線②で図に示した。主流域では式 (4.56) が良好に成立したから実線①が適用され、実際に実験値の変化特性をよく表わしている。一方、壁面近傍では ε^+ の値は式 (2.78) と (4.56) とで表わされる曲線の間中にほぼ存在したから、 $(P^+ - \varepsilon^+)/\varepsilon^+$ の値も曲線①と②

とで囲まれた範囲内にあると考えられる。Fig. 4・41 の変化特性図から、壁面近傍は $P > \varepsilon$ となるエネルギー過剰領域であり、自由水面近傍は $\varepsilon > P \approx 0$ となる不足領域であって、その中間領域に $P \approx \varepsilon$ のエネルギーの動的平衡状態が成立するという再三指摘した重要な特性が確かめられる。

第4・8節 結 言

本章は、2次元開水路流の乱流構造を明らかにする手始めとして、その基本的な乱れ特性値に関する詳細な系統的実験を行い、第2章で得られた理論結果の妥当性を検証すると共に、新たに得られた多くの実験的事実にもとづいて乱流構造の普遍的特性を解明したものである。すなわち、第4・5節までの前半部では、乱れ強度や Reynolds 応力に及ぼす R_g 、 F_r 及び壁面粗度の影響に関する系統的な検討を行い、その特性を乱れの self-consistency に立脚して考察したものであり、得られた主な知見を列挙すれば次のとおりである。

(1) 限界流付近の乱流では、水面変動すなわち inactive な成分の影響で、摩擦速度で無次元化された乱れ強度は普遍的特性を失うが、他の流れでは active 成分が強く、 R_g や F_r の変化によらない普遍特性分布を示す。現象論的及び Navier-Stokes の式に基づく近似考察の結果から、この普遍関数として式(4・11)の指数関数を採用するのが最も妥当であることが確かめられた。

(2) 粗面乱流では粗度の影響が壁面近傍に現われ、その結果 u'/U_* は系統的に減少するが、一方 v'/U_* は若干増加する傾向が見られる。この現象は、粗度によって平均渦径(マクロ・スケール)が減少する、すなわち攪乱渦が崩壊され易く、乱れエネルギーの再配分が進むためと解釈でき、粗面乱流ほど等方化指向が強いことが認められた。

(3) (2)の事実から、粗面乱流の乱れ強度特に u'/U_* の分布は普遍特性を示さず、平均渦径の減少を考慮した普遍表示が望まれる。この場合、今本による $(u'/U_*)(U^+)^{-1/3}$ 表示は粗度の影響が顕著な壁面領域で普遍特性を良好に示すことが明らかにされた。

(4) 実用性のある相対乱れ強度に関しては、 F_r の影響は無視できるが、 R_g が増加すれば減少し、また相対粗度が増大すれば逆に増加する。

(5) Reynolds 応力は R_g 、 F_r 及び壁面粗度の影響を受けずに式(4・20)で表わされる普遍特性を示す。すなわち、Bradshawによる乱流区分から、Reynolds 応力は active 成分のみによって支配されていることが確認でき、Reynolds 応力分布から摩擦速度を決定しようとした本研究での評価方法に物理的な根拠を与えている。

次に、本章の後半部では、速度変動のスペクトル分布特

性や特性渦スケール間の関係を第2章の理論結果に沿って考察し、また乱れエネルギーの逸散率、発生率及び拡散率を評価してそれらの収支関係を検討した。その結果、次のことが結論づけられる。

(6) R_g が比較的小さい室内実験でも慣性小領域が近似的に存在し、 $-5/3$ 乗則が良好に成立する。したがって、この小領域の分布特性に注目した逸散率の評価方法が有効であることが確かめられた。

(7) 修正されたマクロ・スケール \hat{L}_x で u 成分のスペクトル分布を無次元表示すれば、ほぼ R_L のみに依存した普遍的特性を示し、第2章で提案された理論曲線と良好に一致した。

(8) v や w 成分のスペクトルあるいは $-\overline{uv}$ のコ・スペクトル特性から、粘性小領域に至ればほぼ等方性乱流の関係が満足されることが示された。

(9) マクロ・スケール L_x は y/h の $1/2$ 乗則に従い、ミクロ・スケールになるほどこの変化は緩慢となる。また L_x は粗面乱流ほど小さくなり、上記(2)の結果の妥当性が裏付けられた。

(10) 乱れエネルギーの発生率及び逸散率は R_g 、 F_r 及び壁面粗度にはよらない普遍特性をほぼ示したが、拡散率は粗度の影響を平衡領域のほぼ中央部まで顕著に受けることが認められた。

(11) 乱れエネルギーの収支関係を検討した結果、巨視的には発生率と逸散率とが釣り合っているが、自由水面付近は乱れエネルギーの不足領域、壁面近傍は過剰領域であり、両者間に動的なエネルギー平衡状態が存在する。詳しくいえば、滑面乱流では乱れの発生が最も著しい buffer 層で乱れエネルギーは過剰となるが、一方粗面乱流では buffer 層は存在せず、粗度によって乱れの発生機構が顕著に変化するものと推測された。

以上のように本章は、乱れ変動量を長時間平均するという従来からの統計処理方法に従い、諸々の基本的な乱れ特性値を検討したものであり、長時間平均で見た乱流構造がかなり明らかとなった。これらの多くの知見をもとに、本章では乱れの発生機構を検討し、さらに長時間平均では検出できない coherent な渦運動特性に関して考察を進めることとする。

第4章 参考文献

- 1) Raichlen, F.: Some turbulence measurements in water, Proc. of ASCE, EM-2, pp. 73-97, 1967.
- 2) McQuivey, R. S. & Richardson, E. V. Some turbulence measurements in open-channel flow, Proc. of ASCE, HY-1, pp. 209-223, 1969.
- 3) 石井千万太郎, 板倉忠興, 岸力: Hot-film流速計による開水路の乱れの測定, 土木学会論文報告集, 第180号,

- pp. 51-60, 170.
- 4) Blinco, P. H. & Partheniades, E. : Turbulence characteristics in free surface flows over smooth and rough boundaries, *J. Hydraulic Research*, vol.9, pp.43-69, 1971.
 - 5) 今本博健：開水路流れにおける乱れの基本的特性について，土木学会論文報告集，第197号，pp. 83-91，1972.
 - 6) 中川博次，祢津家久，上田寛：粗・滑面水路上の乱れ特性について(2)，第29回土木学会年講，Ⅱ-181，1974.
 - 7) Nakagawa, H., Nezu, I. & Ueda, H. : Turbulence of open channel flow over smooth and rough beds, *Proc. of JSCE*, No.241, pp.155-168, 1975.
 - 8) 中川博次，祢津家久，為沢長雄：開水路滑面乱流におよぼすフルード数の効果について，第30回土木学会年講，Ⅱ-193，1975.
 - 9) Townsend, A. A. : Equilibrium layers and wall turbulence, *J. Fluid Mech.*, vol.11, pp.97-120, 1961.
 - 10) Rotta, J. C. : *Turbulente Strömungen*, Teubner, 1972, (大路通雄(訳)：乱流，岩波書店，pp. 118-175, 1975).
 - 11) Bendat, J. S. & Piersol, A. G. : *Measurement and analysis of random data*, John Wiley & Sons, pp.278-320, 1968.
 - 12) 祢津家久：管路内跳水の乱れ特性に関する研究，京都大学修士論文，1973.
 - 13) 上田寛：粗面水路上のせん断乱流の特性に関する研究，京都大学修士論文，1974.
 - 14) Keulegan, G. H. : Laws of turbulent flow in open channels, *J. Research of N.B.S.*, vol. 21, pp.707-741, 1938.
 - 15) Laufer, J. : The structure of turbulence in fully developed pipe flow, *NACA*, TR-1174, 1954.
 - 16) Bradshaw, P. : 'Inactive' motion and pressure fluctuations in turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol.30, pp.241-258, 1967.
 - 17) Nakagawa, H. & Nezu, I. : On a new eddy model in turbulent shear flow, *Proc. of JSCE*, No.231, pp.61-70, 1974.
 - 18) Ljatkher, V. M. : Calculation of spectra of turbulent pulsations in uniform flows, *Proc. of 12-th Cong. of IAHR*, vol.2, B-3, 1967.
 - 19) 林泰造，山田正：線型スペクトル法による2次元乱流の解析，第30回土木学会年講，Ⅱ-201，1975.
 - 20) 岩垣雄一：雨水流による地面浸食機構に関する研究，京都大学学位論文，1955.
 - 21) Smutek, R. : Discussion on 'Measurement of turbulence in water' by Richardson et al., *Proc. of ASCE*, HY-1, pp.519-523, 1969.
 - 22) Monin, A. S. & Yaglom, A. M. : *Statistical fluid mechanics*, MIT Press, vol.1, pp.257-416, 1971.
 - 23) Clark, J. A. & Markland, E. : Flow visualization in turbulent boundary layers, *Proc. of ASCE*, HY-10, pp.1653-1664, 1971.
 - 24) Grass, A. J. : Structural features of turbulent flow over smooth and rough boundaries, *J. Fluid Mech.*, vol.50, pp.233-255, 1971.
 - 25) Chen, C. K. & Roberson, J. A. : Turbulence in wakes of roughness elements, *Proc. of ASCE*, HY-1, pp.53-67, 1974.
 - 26) Antonia, R. A. & Luxton, R. E. : The response of a turbulent boundary layer to a step change in surface roughness, *J. Fluid Mech.*, vol.48, pp.721-761, 1971.
 - 27) Englund, F. : Dispersion of floating particles in uniform channel flow, *Proc. of ASCE*, HY-4, pp.1149-1162, 1969.
 - 28) Laufer, J. : Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel, *NACA*, TR-1053, 1951.
 - 29) 玉井信行，林博一，廣沢佑晴：開水路の乱れに及ぼすフルード数の影響について，第30回土木学会年講，Ⅱ-195，1975.
 - 30) Bremhorst, K. & Walker, T. B. : Spectral measurements of turbulent momentum transfer in fully developed pipe flow, *J. Fluid Mech.*, vol.61, pp.173-186, 1973.
 - 31) Lu, S. S. & Willmarth, W. W. : Measurements of the structure of the Reynolds stress in a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol.60, pp.481-511, 1973.
 - 32) Bradshaw, P., Ferriss, D. H. & Atwell, N. P. : Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation, *J. Fluid Mech.*, vol.28, pp.593-616, 1967.
 - 33) Klebanoff, P. S. : Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, *NACA*, TN-3178, 1954.
 - 34) Hinze, J. O. : *Turbulence* (2nd ed.), McGraw-Hill, pp.586-770, 1975.
 - 35) 祢津家久，中川博次：開水路乱流におよぼす水面波の影響について，第31回土木学会年講，Ⅱ-222，1976.
 - 36) Schlichting, H. : *Boundary layer theory* (6th ed.), McGraw-Hill, pp.375-408, 1968.
 - 37) 岩佐義朗：水理学，朝倉書店，pp. 169-172, 1967.
 - 38) Jeager, C. : *Engineering fluid Mechanics*, Blackie & Son, pp.122-127, 1956.
 - 39) 力石国男，光易恒：スペクトル計算法と有限フーリエ級数，九大応用力学研究所報，第39号，pp. 77-104，1973.
 - 40) 土木学会(編)：水理公式集，土木学会，pp. 475-478，1971.
 - 41) Corcos, G. M. : The structure of turbulent pressure field in boundary layer flows, *J. Fluid Mech.*, vol.18, pp.353-378, 1964.
 - 42) Willmarth, W. W. & Wooldridge, C. E. : Measure-

- ments of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol. 14, pp. 187-210, 1962.
- 43) 中川博次, 祢津家久: 管路内跳水に関する基礎的研究 第26回土木学会年講, II-99, 1971.
 - 44) 中川博次, 祢津家久: 管路内跳水に関する実験的考察, 第16回土木学会水理講演会論文集, pp. 43-48, 1972.
 - 45) Hinze, J. O.: *Turbulence*, McGraw-Hill, pp. 451-566, 1959.
 - 46) Monin, A. S. & Yaglom, A. M.: *Statistical fluid Mechanics*, MIT Press, vol. 2, pp. 337-652, 1975.
 - 47) Fisher, M. J. & Davies, P. O. A. L.: Correlation measurement in a non-frozen pattern of turbulence, *J. Fluid Mech.*, vol. 18, pp. 97-116, 1964.
 - 48) Lumley, J. L.: Interpretation of time spectra measured in high-intensity shear flows, *Phys. of Fluids*, vol. 8, pp. 1056-1062, 1965.
 - 49) Favre, A., Gaviglio, J. & Dumas, R.: Structure of velocity space-time correlation in a boundary layer, *Phys. of Fluids*, vol. 10, pp. S138-S145, 1967.
 - 50) Sternberg, J.: On the interpretation of space-time correlation measurements in shear flow, *Phys. of Fluids*, vol. 10, pp. S146-S152, 1967.
 - 51) Lin, C. C.: On Taylor's hypothesis and the acceleration terms in the Navier-stokes equation, *Quar. of Applied Math.*, vol. x, pp. 295-306, 1953.
 - 52) Batchelor, G. K.: *Homogeneous turbulence*, Camb. Univ. Press, 1953 (巽友正(訳): 乱流理論, 吉岡書店, 1960).
 - 53) Bradshaw, P.: Conditions for the existence of an inertial subrange in turbulent flow, *A.R.C., R. & M.*, No. 3603, 1967.
 - 54) 余越正一郎: 河川乱流に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1970.
 - 55) Townsend, A. A.: *The structure of turbulent shear flow*, Camb. Univ. Press, 1956.
 - 56) Grant, H. L., Stewart, R. W. & Moilliet, A.: Turbulence spectra from a tidal channel, *J. Fluid Mech.*, vol. 12, pp. 241-268, 1962.
 - 57) Lawn, C. J.: The determination of the rate of dissipation in turbulent pipe flow, *J. Fluid Mech.*, vol. 48, pp. 477-505, 1971.
 - 58) Hinze, J. O.: *Turbulence* (2-nd edi.), McGraw-Hill, pp. 586-770, 1975.
 - 59) Einstein, H. A. & Li, H.: The viscous sublayer along a smooth boundary, *Proc. of ASCE, EM-2*, pp. 1-27, 1956.

第5章 乱れ発生機構に関する実験的研究

第5・1節 緒 言

前章は、乱れ変動量の長時間平均をとり、各種の乱れ特性値に関する普遍特性を検討しようとした従来からの手法に基づく研究であり、いわば「古典的な研究」ともいえるが、開水路乱流に関して長時間平均で見た物理機構が明らかにされた成果は大きい。これらの知見をもとに、せん断乱流の本質である乱れ発生の機構を解明することが次の段階と考えられる。従来ランダムと考えられていた乱れ変動の中にも相当規則性をもった運動すなわち coherent な運動の存在が最近認められて来たが¹⁾ 第2・6節で指摘したように乱れ発生機構すなわち bursting 現象はこの coherent な運動の一種とも見なしうる (Fig. 2・20参照)。したがって、bursting 現象を解明するには前章で行ったような長時間平均手法では不可能であって、条件付サンプリング手法や新たな解析手法の開発が必要となる。しかし、この解決が迫られている最新の研究課題もその理論的展開が極めて困難であり、実験的研究に頼らざるを得ないのが実情である。これらの経緯は Mollo-Christensen (1971) によって詳しく論述されているが²⁾ bursting 現象の解明に K-line ら (1967) が先駆けた可視化実験の果たした役割は大きく³⁾ それと共に、1972年には初めて Willmarth ら⁴⁾ や Wallace ら⁵⁾ によってアナログ手法を用いた点計測実験が行われ、可視化観察結果を定量的に検証した点は注目される。その後、巧妙な可視化技術やデジタル手法を用いた条件付点計測技術が開発され、乱れの発生機構に関する注目すべき知見が得られるようになった。例えば、前者では Nychas ら (1973)⁶⁾ や Offen ら (1974)⁷⁾ の研究が、後者では Lu ら (1973)⁸⁾ や Brodkey ら (1974)⁹⁾ の研究が注目に値するであろう。著者もこれらの技術を開発して開水路流における乱れ発生機構の研究に着手し、可視化手法を用いた成果 (1974)¹⁰⁾ や点計測手法を用いた成果 (1975)¹¹⁾ をその手始めとして発表し、さらに最近より洗練された研究成果 (1977) を発表した。¹²⁾

以上の研究成果を踏まえて本章では、まず第2・6節で得られた理論的予測結果の妥当性を実験的に検証し、乱れ発生機構の理論的解明に糸口を見出し、次に条件付サンプリング手法を駆使して bursting 現象の周期性を検討し、さらに水素気泡法を用いた可視化観察からこの物理機構に現象論的な考察を加えようとするものである。

なお、第4章での研究結果から乱れの発生機構は Re や Fr よりむしろ壁面粗度の影響を受けることが示されたから、以下では主として Table. 4・1(c) に示した低速流グルー

プを対象として、乱れ発生機構に及ぼす粗度の影響を検討する。

第5・2節 速度変動及び瞬間 Reynolds 応力の確率分布

5・2・1 速度変動の確率分布とその高次モーメント

0.01秒間隔で数値化された瞬間速度変動成分 (u, v) を乱れ強度で正規化した $\hat{u} \equiv u/u'$ 及び $\hat{v} \equiv v/v'$ を確率変数とし、 $-3 \leq \hat{u}, \hat{v} \leq 3$ を40個に区分けてサンプリングを行い、確率密度関数 $p(\hat{u})$ 及び $p(\hat{v})$ の実測値を得た。Frenkiel ら (1973) は、正確な確率分布形を得るためにはサンプル総数 N を10万個程度選ぶことが望ましいと指摘しているが、¹³⁾ 本研究では電算機の容量制限から $N=5000$ として解析を行った。しかし、この場合でも各実験ケースにおける解析データ数は膨大であり、得られた結果をすべて $X-Y$ プロッターで図化して、その省力化を図った。

さて、Fig. 5・1は、滑面乱流の実験A-1で得られた各領域における代表的な確率分布を示したものであり、他のケースでもほぼ同じ結果が得られた。実験値は Gauss 分布に近い変化を示しているが、詳細に検討すると $p(\hat{u})$ 及び $p(\hat{v})$ には共に Gauss 分布からの系統的な差異が見い出せる。¹²⁾ すなわち、 $p(\hat{u})$ の実験値は $\hat{u} > 0$ で最大値をとり、またその分布幅は $\hat{u} > 0$ の場合より $\hat{u} < 0$ の方が大きく、いわば Gauss 分布全体を時計回りに歪ましたような分布形となっている。一方、 $p(\hat{v})$ の実験値は $p(\hat{u})$ とまったく逆な Gauss 分布からのずれを示し、このため $p(\hat{u})$ と $p(\hat{v})$ とは、 $\hat{u} = \hat{v} = 0$ の軸に関して互にほぼ対称な分布特性を示している。この Gauss 分布との差異が小さいところから、従来の研究ではとかく看過されてきたが、第2・6節で予測されたように、この差異こそが乱れの発生機構を解く鍵と考えられる。そして、最近 Brodkey ら (1974) をはじめとする多くの研究者によってその重要性が認識されるようになり⁹⁾ Bayazit (1976) は壁面粗度の種類を問わずこの差異が存在することを見出している。¹⁴⁾

さて、この Gauss 分布からのずれを考慮に入れた確率分布が第2・6節で導入された Gram-Charlier 型分布に他ならないから、その理論展開に沿って詳細に検討する。式 (2・101) で示された3次オーダさらには4次オーダの Gram-Charlier 分布を得るためには、3次のキュムラント Q_{30} 及び Q_{03} や4次のキュムラント Q_{40} 及び Q_{04} が必要となる。これらのキュムラント項は Skewness 因子 S 及び F-

latness 因子 F が既知であれば、式 (2・94) から次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{30} &= S_u \equiv \overline{\hat{u}^3}, \quad Q_{03} = S_v \equiv \overline{\hat{v}^3} \\ Q_{40} &= F_u - 3 \equiv \overline{\hat{u}^4} - 3, \\ Q_{04} &= F_v - 3 \equiv \overline{\hat{v}^4} - 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.1)$$

いま、滑面乱流についての Skewness 及び Flatness 因子の実験値が Fig. 5・2 に示され、Gupta ら (1972) による境界層流での実験値¹⁵⁾ や Kreplin (1973) による油流 (oil-flow) での実験値¹⁶⁾ も比較のため併示された。本実験では $y^+ < 30$ の buffer 層以下での計測はできなかったが、それ以外の領域での実験値は Gupta らや Kreplin の結果と比較的良好に一致している。Gauss 分布ならばすべてのキュムラントは零、すなわち $S_u = S_v \equiv 0$ 、 $F_u = F_v \equiv 3$ となるが、実験値はこれらの Gaussian 値から明らかにずれている。

まず、Skewness 因子に関して検討すれば、 S_u と S_v とは零軸 (Gaussian 値) に関してほぼ対称であり、粘性底層端 $y^+ = 10$ でそれらの符号が逆転することが注目される。すなわち、 S_u は $y^+ \lesssim 10$ で大きな正の値をとるが、 $y^+ \gtrsim 10$ の壁面領域及び平衡領域ではほぼ一定の負の値をとっている。自由水面領域に入ると、本実験での $|S_u|$ は増大して最大に達した後減少するようであるが、境界層流では増大し続ける。この両者の相違はさらに検討を要するが、境界層端に存在する大規模な intermittency の有無によるものと推測される¹⁷⁾。一方、 S_v は S_u と符号が逆であるが、その絶対値の変化特性はほぼ同じであるといえる。同様に、Flatness 因子は $y^+ \lesssim 10$ の粘性底層及び自由水面領域で Gaussian 値よりかなり大きな値をとるが、その中間領域では比較的小さなほぼ一定値をとり、Gaussian 値に関して F_u と F_v とはほぼ対称に分布している。

以上の Skewness 及び Flatness 因子を式 (2・101) に代入して得られた Gram-Charlier 型の分布曲線が Fig. 5・1 に併示された。実験値とこの理論曲線との一致はほぼ良好であり、前述した Gauss 分布からの差異をよく表わしている。当然、3 次オーダより 4 次オーダの Gram-Charlier 分布の方が実験値をより正確に表現しているが、両者の差はそれほど大きくない。粘性底層や自由水面領域においては Skewness 及び Flatness 因子は共に Gaussian 値と大きな差異を示し、4 次オーダ以上の高次の Gram-Charlier 分布が必要となるが、 $y^+ \gtrsim 10$ の壁面領域及び平衡領域では 3 次オーダの分布を適用しても十分に妥当であるといえる。

上述の議論の妥当性をさらに検討するために、4 次モーメント M_{40} 及び 5 次モーメント M_{50} の実測値が Fig. 5・3 に示され、また Lawn (1971) によって得られた管路流での結果も併示された。¹⁸⁾ 4 次モーメントは先述した Flatness 因子そのものであり、滑面及び粗面乱流での変化特性

が示されている。実験値は若干ばらついているが、その変化特性には粗度による系統的な差異は認められず、また Lawn の結果とも良好に一致しているといえる。次に、高次モーメントほど実験精度や解析精度は低下するから、その定量評価に当っては慎重を要するが¹⁹⁾ 5 次モーメント M_{50} の実測値を検討すると、図から明らかなように、 M_{50} の実測値は Gaussian 値すなわち $M_{50} \equiv 0$ から大きなずれを示している。さて、式 (2・94) と同様に計算すれば、

$$Q_{50} = M_{50} - 10 M_{30} \dots\dots\dots (5.2)$$

となり、5 次キュムラント Q_{50} を零とおけば $M_{50} = 10 M_{30} \equiv 10 S_u$ が得られる。この関係式を使って 3 次モーメント M_{30} の実測値から評価された 5 次モーメントが Fig. 5・3 に折線で示された。 M_{50} の実測値と式 (5.2) の 5 次キュムラント打ち切り計算値とは比較的良好に一致し、 M_{50} と M_{30} とはほぼ等しい変化特性を示すといえる。また、 M_{05} すなわち \hat{v} に関するモーメントも M_{03} から良好に予測することができた。

以上の実験事実は、第 2・6 節で行った高次キュムラント打ち切り手法が妥当であることを示す例証と考えられる。また、Gauss 分布の奇数次モーメントはすべて零であるが、高次の奇数次モーメントほど零と近似することは許されず¹⁹⁾ この事実の一端が Fig. 5・3 で示されている。奇数次モーメントは確率分布形の偏りを示す指標であり、この偏りこそが Fig. 2・20 で示した bursting 過程での高速流及び低速流の挙動を表わすものと考えられるから、3 次モーメント (3 次キュムラント) を零とする近似は容認されず、bursting 現象の解明には少なくとも 3 次オーダの Gram-Charlier 分布を使わなくてはならない²⁾。もちろん、先述のように 4 次オーダの分布の方がより正確な表現となるが、第 2・6 節の理論結果から 4 次キュムラントは 3 次キュムラントのように bursting 現象に関与しないと考えられ、 $y^+ \gtrsim 10$ の壁面領域及び平衡領域における bursting 現象の解明に 3 次オーダの分布を簡単に適用しても十分な成果が得られるであろう。さらに言うならば、4 次モーメント (一般には偶数次モーメントも同様であろう^{*)}) と異なり、3 次や 5 次のモーメント (一般には奇数次モーメントも同様であろう) には壁面近傍で粗度の影響が顕著に現われている。第 4 章で乱れの発生機構は粗度の影響を顕著に受けることが示唆されたが、このように 4 次モーメントに比べて 3 次モーメントが粗度の影響を強く受けるという事実は、乱れの発生機構に 3 次モーメント (3 次キュムラント) が大きく関与していることを示す一つの証拠と考えられ、上

*) $Q_{ij} \equiv 0$ ($i+j \geq 5$) とおけば、 $M_{00} = 15M_{40} - 30$ 、 $M_{00} = 105M_{30}$ 、 $M_{50} = 210M_{40} - 525$ 、 \dots (M_{0j} も同様) が得られ、奇数次モーメントは 3 次モーメントで、偶数次モーメントは 4 次モーメントでそれぞれ表現される。

述のことで矛盾していない。乱れ発生機構に及ぼす粗度の影響は後に詳しく検討される。

5・2・2 瞬間Reynolds 応力の確率分布

正規化された瞬間 Reynolds 応力の変動値 $w \equiv uv/\overline{uv}$ については、 $-6 \leq w \leq 8$ を 40 個のメッシュに分けてサンプリングし、その確率密度分布 $p_w(w)$ を得た。これらの結果を X-Y プロッターで図化したのが、Fig. 5・1 と同じ測点で得られた $p_w(w)$ の実測値を示したのが Fig. 5・4 であり、粗面乱流でもこれとほぼ同じ結果が得られた。なお、 $w < -6$ 及び $w > 8$ の両周辺部分の確率総和はそれぞれ図中の破線わきに示された。

さて、Fig. 4・12 で相関係数 R の値は既知であるから、4 次以上の偶数次キュムラント項を無視すれば、式 (2・103) から $p_w(w)$ の理論曲線が計算でき、この結果が Fig. 5・4 に併示された。理論値と実験値とは特に平衡領域で良好な一致を示すが、自由水面領域では両者間に若干の差異が見られる。これは、自由水面領域での 4 次モーメントの Gaussian 値からのずれが大きいためであり、先述のようにこの領域では 4 次オーダ以上の Gram-Charlier 分布に基づいた理論展開が必要であるといえる。

このように、瞬間 Reynolds 応力の確率分布 $p_w(w)$ は 3 次オーダの Gram-Charlier 分布（この場合、Gauss 分布から得られる結果と一致するが）からかなり高精度に予測されると結論してよく、このことは Lu ら (1973)⁸⁾ や Antonia ら (1973)¹⁷⁾ によっても実験的に確認されている。 $p_w(w)$ の変化特性に関する考察は理論曲線である式 (2・103) に基づいて第 2・6 節ですでになされ、この結果 w の特性が intermittent で、しかも $w = 0$ に関して非対称性をもつことが示唆された。これらの瞬間 Reynolds 応力の特性を明らかにするために、 w に関する Flatness 因子 F_{uv} 及び Skewness 因子 S_{uv} を以下検討する¹⁾ Fig. 5・5 は、 S_{uv} 及び F_{uv} の実測値を示したものであり、Antonia ら (1973) による境界層流での実測値も併示した¹⁷⁾ 開水路流での S_{uv} 及び F_{uv} の値は境界層流での値とほぼ一致するが、自由水面領域における値は両者で明らかな差異を示し、これは Fig. 5・2 で示したと同様に境界層端に存在する大きなスケールの intermittency の有無によるものと考えられる。 S_{uv} 及び F_{uv} は、共に平衡領域までは比較的緩慢に変化するが、自由水面領域に至ってその絶対値は急激に増大して最大値をとるようである。すなわち、平衡領域までは $S_{uv} \approx -2$ 、 $F_{uv} = 10 \sim 20$ であり^{*)} $p_w(w)$ は非常に尖ったしかも非対称な分布を示すことが確認でき、この特性は自由

水面領域で最も顕著であるといえる。

さて、5 次以上のキュムラントを零、すなわち $Q_{j,k} \equiv 0$ ($j+k \geq 5$) とおけば、式 (2・94) と同様にして次式が得られる。

$$S_{uv} = \frac{1}{(M_{22} - R^2)^{3/2}} \{ M_{30} M_{03} + 9 M_{12} M_{21} + 3 \times (M_{31} + M_{13}) + 2 R (5 R^2 - 3 M_{22} + 9) \} \quad (5・3)$$

$$F_{uv} = \frac{1}{(M_{22} - R^2)^2} \{ M_{40} M_{04} + 16 M_{31} M_{13} + 24 \times (M_{21} M_{03} + M_{12} M_{30}) + 18 (M_{22}^2 + 2 M_{21}^2 + 2 M_{12}^2) - 30 R^2 M_{22} + 12 R (M_{31} + M_{13} - 9 M_{21} M_{12} - M_{30} M_{03}) - 3 (R^4 + 24 R^2 + 6) \} \quad (5・4)$$

4 次キュムラントも零とおけば、 S_{uv} 及び F_{uv} は 3 次以下のモーメントですべて表現でき、式 (5・4) より簡単化される。4 次モーメントまでの実測値を代入して得られた式 (5・3) 及び (5・4) の結果 (4 次オーダ) が折線で Fig. 5・5 に示され、また F_{uv} に関しては 3 次モーメントまでの実測値を用いて得られた結果 (3 次オーダ) が比較のために併示された。 S_{uv} の実測値と計算値との一致は比較的良好であるが、 F_{uv} に関しては両者で若干の差異を示している。これは、 F_{uv} が (u, v) の 8 次モーメントに、 S_{uv} が 6 次モーメントに相当するから、より高次モーメントである F_{uv} の方が実験誤差や低次キュムラント打ち切りによる誤差を受けやすいと考えられる。しかし、 F_{uv} の 3 次オーダと 4 次オーダの計算値を比較しても両者にはそれほど大きな差は現われず、この比較に関する限り 3 次キュムラントのみを考慮した第 2・6 節での理論予測の精度はそれほど悪くないと思われる^{*)}。

最後に、壁面近くでは粗度の影響が S_{uv} のみならず F_{uv} にも現われている。すなわち、粗面乱流での $|S_{uv}|$ 及び $|F_{uv}|$ の値は滑面乱流より小さくなっている。Fig. 4・37 や 5・3 で示したように 3 次モーメントには壁面近くで粗度の影響が顕著に現われるから、式 (5・3) 及び (5・4) から S_{uv} 及び F_{uv} にもこの影響が現われると説明できる。特に、 u や v の Flatness 因子に粗度の影響が明確でなかったのに比べて uv の Flatness 因子にはこの影響が把握できる点は注目に値する。

5・2・3 瞬間Reynolds 応力の条件付確率分布

第 2・6 節の理論的考察で示されたように、前述の $p_w(w)$ では bursting 現象の各事象 (event) の特性は把握できないから、この現象の解明には条件付確率密度分布 $p_i(w)$ ($i = 1 \sim 4$) の検討が必要である。 $p_i(w)$ の理論曲線は式 (2・113) 及び (2・114) で示された $\phi^+(w)$ 及び $\phi^-(w)$ から計算

*) 3 次キュムラントも零とおく、すなわち Gaussian ならば S_{uv} 及び F_{uv} は R のみの関数となり、平衡領域で $R \approx 0.4$ であることから $S_{uv} \approx -2.0$ 、 $F_{uv} \approx 13.8$ が得られる。これらの計算値は平衡領域での実測値と大体一致するから、この場合低次キュムラント打ち切りでも妥当であるといえる。

されるが、そのためにはパラメータ S^+ , S^- , D^+ 及び D^- の値が既知でなければならず、まずこれらの特性を考察する。

Fig. 5・6 は、 u 及び v に関する Skewness 因子 S 及び Diffusion 因子 D の実測値をそれぞれ示したものであり、比較のために Lawn (1971) によるアナログ手法から得られた管路流での実験結果も併示された。¹⁵⁾ 計測精度や解析手法の相違から生じる誤差のために、本実測値は Lawn の結果と若干差異を示すものの、自由水面領域以外では両者の変化特性はほぼ同じである。^{*)} Skewness 因子 S の特性はすでに考察されたが、Diffusion 因子 D もこれとよく似た変化特性を示している。すなわち、両者に共通した最も重要な特性は次の二点であると考えられる。

(i) S_u と S_v 、また D_u と D_v とは零軸 (Gaussian 値) に関して互にほぼ対称な分布を示す。壁面のごく近く以外では $S_u < 0$, $S_v > 0$ 及び $D_u < 0$, $D_v > 0$ である。

(ii) 壁面の近くではこれらの値に粗度の影響が顕著に現われている。

(i) の特性は Fig. 5・2 ですでに考察された。(ii) の特性に関しては、Skewness 及び Diffusion 因子が 3 次キュムラントと同等であり、また拡散率 T_r も関係つけられるから^{*)} これまでの実験結果から言ってこれらの値に粗度の影響が現われるのは当然と考えられる。¹¹⁾ Fig. 5・6 で見られるように、粗面乱流ほど壁面近くで S 及び D の絶対値は小さくなり、粗度の影響は平衡領域のほぼ中央部まで及んでいる。

以上の実験結果を使って式 (2・115) から評価された S^+ , S^- , D^+ 及び D^- が Fig. 5・7 に示された。実験値はかなりばらついてはいるが、上述の (i) 及び (ii) の特性から次の考察が可能である。まず (i) から、 S^+ 及び D^+ は零に近い値をとるが、 S^- 及び D^- はそれぞれ S_v 及び D_v にほぼ等しいという結果が得られ、このことは Fig. 5・7 で認められる。次に (ii) から、 S^- 及び D^- には壁面近くで粗度の影響が現われるが、 S^+ 及び D^+ にはこの影響は打消されてほとんど現われなないといえる。

このように、パラメータ S^+ , S^- , D^+ 及び D^- に関する概略的な特性が把握できたが、これらのパラメータは本研究ではじめて導入されたものであり、Lawn の実験結果から計算できた値以外にはこの種のデータは著者の知る限り入手できない。^{*)} しかし、これらは bursting 現象の挙動を理論的に解明する際に不可欠な値であるから、十分なデータを収集

して定量評価しうる段階まで追究する必要がある。このため、今回 Table. 4・1 の高速流グループの実験ケースに関して検討し¹⁶⁾ その結果が Fig. 5・8 に示された。明確な結論付けは早計であるが、その結果は Fig. 5・7 の低速流グループのものとほぼ同じであり、以上の実験結果から次の特性が明らかにされた。

(1) S^+ , S^- , D^+ 及び D^- は共に、 Fr や Re の影響をほとんど受けず、ほぼ普遍的な特性を示す。

(2) S^- 及び D^- は壁面近くで顕著な粗度の影響を受け、その絶対値は小さくなる。この粗度の影響は平衡領域の中央部付近にまで及ぶ。

(3) S^- と D^- は相互にほぼ相似な変化特性を示し、自由水面領域まで単調に増加して最大値に達した後、減少する。このため、 D/S^- の値はほぼ一定となり、約 0.7 をとる。

(4) S^+ 及び D^+ は零に近い値をとるが、 S^+ は D^+ に比べて若干大きなばらつきを示し、 $S^+ \approx 0$ とする近似度も悪い。

以上の各パラメータが既知となれば、式 (2・109)~(2・112) から条件付確率分布 $p_i(w)$, ($i=1\sim 4$) が計算できる。なお、Bessel 関数 $K_\alpha(t)$ は級数展開式が用意されており、特に $\alpha=1/2$ では $K_{1/2}(t) = \sqrt{\pi/2t} \cdot e^{-t}$ と表現される。

Fig. 5・9 は各事象の確率分布 $p_i(w)$, ($i=1\sim 4$) を $|w|p_i(w)$ の形で表現した平衡領域における計算結果の一例であり、他の測点や粗面乱流でも同様な結果が得られた。また、例示した測点とほぼ等しい位置での Brodkey ら (1974) の油流に関する実測値も併示された。¹⁷⁾ 図から明らかなように、ejection 及び sweep 事象の発生確率は interaction 事象より大きく、しかも $|w|$ が大きい周辺部分までかなり大きな値を示している。 u 及び v の変動確率が Gauss 分布に近似されれば、 $p_1(w) \equiv p_3(w)$ 及び $p_2(w) \equiv p_4(w)$ となり、その結果が破線で図に示された。Gauss 分布による結果は $w > 0$ で ejection と sweep 事象との平均、 $w < 0$ で inwards と outwards 事象との平均であり、少なくとも 3 次オーダの Gram-Charlier 分布が考慮されなければ各事象の発生確率の特性は解明され得ないことが確認される。 $w \cdot p_2(w)$ は $w \cdot p_4(w)$ より小さな最大値をとるが、 $w \leq 5$ で両者の大小関係は逆転し、 $w \geq 5$ では ejection 事象の発生確率の方が大きい。換言すれば、例示した測点での ejection 事象は他の事象に比べて最も強い intermittency を示し、Reynolds 応力への寄与も大きいといえる。interaction 事象同志の関係も上述の ejection と sweep の関係に類似し、inwards 事象 ($u < 0$) は ejection ($u < 0$) に、outwards 事象 ($u > 0$) は sweep ($u > 0$) にそれぞれ相似的な確率特性を示している。このことは、bursting 現象が v よりむしろ u の変動特性により相関づけられると指摘した Brodkey ら (1974) の観測結果を理論的に支持するものであり¹⁸⁾ Fig. 5・9 で見られるように彼らの実測値は本研究で

*) 自由水面領域の S_u 及び D_u は管路流での結果と差異を示すが、 S_v 及び D_v はそれほどの差異を示していない。したがって、 $T_r = (u^2 v / 2) D_v + v^3 S_v$ であるから、 T_r の値は開水路と管路流とはほぼ同じであると予測され、事実このことは Fig. 4・37 で示された。

**) Skewness 因子 S_u 及び S_v に関する従来のデータは Fig. 5・2 のように比較的多く入手でき、 S^+ 及び S^- の値は容易に決定できる。

の理論曲線と良好に一致している。

なお、 $w_{p4}(w)$ は $w \geq 15$ で小さな負の値を示したが、これは明らかに不合理であり、3次オーダのGram-Charlier分布を用いたことによる近似誤差であると考えられる。特に、自由水面領域では3次オーダの分布による近似誤差は無視できない大きさになるが、このことは後で検討する。

第5・3節 Reynolds 応力の内部構造と乱れ発生機構

5・3・1 Reynolds 応力の内部構造

第2・6節で定義したように、瞬間 Reynolds 応力 w にレベル H を設定し、各事象の寄与率 $RS_i(H)$ 及び占有時間率 $T_i(H)$ 、($i=1 \sim 5$)を検討する。

さて、Luら(1973)と同様な条件付サンプリング手法を行えば⁸⁾ $RS_i(H)$ 及び $T_i(H)$ 、($i=1 \sim 4$)の実測値は次のように求められる。

$$T_i(H) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I_i(t, H) dt \\ \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \{ I_i(t_j, H) \} \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

$$RS_i(H) = \frac{1}{\bar{w}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w(t) v(t) I_i(t, H) dt \\ \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \{ w(t_j) I_i(t_j, H) \} \quad \dots\dots\dots (5.6)$$

ここで、

$$I_i(t, H) \equiv \begin{cases} 1 : |w(t)| > H \text{ でかつ } (u, v) \text{ 点が第} \\ \quad i \text{ 象限に存在するとき。} \\ 0 : \text{それ以外するとき。} \end{cases}$$

また、hole 事象($i=5$)は次のように得られる。

$$T_5(H) = 1 - \sum_{i=1}^4 T_i(H), \quad RS_5(H) = 1 - \sum_{i=1}^4 RS_i(H) \\ \dots\dots\dots (5.7)$$

まず滑面乱流の場合を検討することにして、Fig. 5・10(a), (b) 及び(c)にそれぞれ壁面領域、平衡領域及び自由水面領域における代表測点(Fig. 5・4の各測点と同じ)での結果が示されている。 $RS_i(H)$ の実験値は白丸で図示され、 $T_i(H)$ の実験値に関しては図面の繁雑さを避けるために $T_5(H)$ のみが黒丸で示された。式(2・118)から得られる $RS_i(H)$ 及び式(2・116)から得られる $T_i(H)$ の理論曲線はそれぞれ実線及び破線で示されている。図から明かなように、壁面領域及び平衡領域ではレベル H が大きい所まで理論曲線と実測値との一致は非常に良好であり、bursting現象の各事象は3次オーダのGram-Charlier分布から十分正確に表現されると考えられる。しかし、自由水面領域

では $H \lesssim 5$ での理論曲線と実測値との一致は良好であるが、 $H \gtrsim 5$ では両者の差異は無視できず、もはや3次オーダの分布から得られる理論曲線は適用できない。とりわけ、この理論曲線は H が大きいときのsweep事象で負となる不合理さを示し、先述したように自由水面領域ではさらに高次キュムラントまで考慮に入れた理論展開が必要であると考えられる。

さて、本実験の範囲内では壁面及び平衡領域におけるReynolds 応力の内部構造はほぼ同じであり、またLuら(1973)の境界層流での実験結果ともよく一致し⁸⁾以下の様な特性が明らかにされた。¹²⁾ $H=1$ でhole事象が全時間経過のほぼ半分を占めるにもかかわらず、Reynolds 応力の発生に2~3%しか寄与していない。換言すれば、Reynolds 応力の発生すなわち $w(t)$ の変化特性は強いintermittencyをもつことがわかる。 $|RS_5(H)|$ は $|RS_i(H)|$ より若干大きいが、 $H=5$ のレベルでほぼ零となり、これらinteraction事象が果たすReynolds 応力への負の寄与は消滅する。 $H=10$ に達すると、sweep事象が果たす寄与もほぼ零となり、それ以上のレベルではejection事象のみがReynolds 応力の発生に寄与していることがわかる。 $H \geq 10$ では $w(t)$ はほとんどhole事象に占められてしまうから、ejection事象は非常に短時間のうちにかなりのReynolds 応力を発生させるものと考えられ、このejection事象のいわばパルス的な挙動は、Corinoら(1969)²⁰⁾ Kimら(1971)²¹⁾ Grass(1971)²²⁾ 著者ら(1974)¹⁰⁾などの多くの研究者によって得られた可視化観察の結果とよく一致する。占有時間率 $T_i(H)$ は $T_2(H) \simeq T_4(H)$ 及び $T_1(H) \simeq T_3(H)$ であるが、 H のレベルが小さいとき $T_2 < T_1$ であり、一方Reynolds 応力への寄与率 RS_i は $RS_2 > RS_1$ となることが注目される。自由水面領域でのReynolds 応力の内部構造は他の領域とほぼ同じであるが、 $T_i(H)$ に比べて $RS_i(H)$ の値は他の領域のものよりずっと大きく、それだけ強いintermittencyをもつことがわかる。しかし、Reynolds 応力 \bar{w} 自体は非常に小さくなるから、この内部構造に関する議論はそれほど重要ではないと考えられる。

次に、粗面乱流の場合を検討する。粗度の影響は壁面近くのみに限られることが明らかにされたから、 $\varepsilon=0.085$ で得られた実験結果を代表例としてFig. 5・11に示した(実際に壁面から離れた測点では滑面乱流とほぼ同じ結果が得られた)。粗面乱流でも理論曲線は実験値と比較的良好に一致し、第2・6節での理論結果の妥当性が示される。粗面乱流でのReynolds 応力の内部構造に関して特に注目すべき点は、ejectionとsweep事象との大小関係が滑面乱流の場合と逆になっていることである。すなわち、Fig. 5・11に示された結果では、Reynolds 応力の発生にsweepとejection事象は同程度か、やや前者の方が大きい寄与をしている。このように粗度によってReynolds 応力の内部構造すなわち乱れ発生機構が何らかの変化を受けるものと

考えられ、後で検討する。

5・3・2 bursting 現象の各事象間の大小関係

bursting 現象と瞬間 Reynolds 応力との関係をさらに明確にするためには、 $H=0$ での各事象の大小関係が乱流場全域で検討されなければならない。

Fig. 5・12(a)及び(b)は、それぞれ滑面及び粗面乱流において各事象が果たす Reynolds 応力への寄与率 RS_i ($H=0$) (以下では RS_i と略記する) を示したものであり、また Lu ら (1973)⁸⁾ の滑面境界層流及び Brodkey ら (1974)⁹⁾ の滑面油流で得られた実験結果も併示された。式 (2・118) の理論曲線は実線で示されているが、滑面及び粗面乱流共に実験値を十分な精度で表わし、自由水面領域ですらこの一致は極めて良好である。このことから、Reynolds 応力の内部構造の解明に第 2・6 節での理論結果が極めて有効であることが確認される。

まず、滑面乱流に注目する。本実験結果に関する限り、任意の $\varepsilon = \gamma/h$ で $RS_2 > RS_4 > |RS_3| > |RS_1|$ なる関係が成立している。Reynolds 応力への正の寄与は ejection 事象の方が sweep 事象より大きい、負の寄与となる interaction 事象同志はほぼ等しく、これは $S^+ \approx D^+ \approx 0$ であることによる。壁面領域では ε の増加と共に各事象の寄与率は減少する傾向がある。Brodkey ら ($R_* = 195$)、著者 ($R_* = 600$) 及び Lu ら ($R_* = 1800$) の実験では R_* が相互に異なるから、この詳しい検討は $\gamma^+ \equiv R_* \varepsilon$ を使って次節で改めて行われる。次に、平衡領域における各事象の寄与率は ε によらずにほぼ一定値をとっている。すなわち、Reynolds 応力の生成に ejection 事象は約 75%、sweep 事象は約 60% の寄与をそれぞれ果たし、一方約 35% の過剰な生成成分は interaction 事象の負の寄与によって打ち消されることがわかる。これらの寄与率の値は Lu らや Brodkey らの点計測結果及び Corino ら²⁰⁾ や Kim ら²¹⁾ による可視化観測の結果ともよく一致し、注目に値する。一方、自由水面領域に移ると各事象の寄与率は単調に急増するようである。自由水面近くの ejection 及び sweep 事象は共に平均 Reynolds 応力 $\bar{w} \approx 1$ に 100% 以上の正の寄与率を示し、このため interaction 事象の負の寄与率も急増する結果となる。

次に、粗面乱流における各事象の寄与率を検討するが、著者の知る限りではこの乱流の RS_i を評価した従来の研究例はない。¹²⁾ Fig. 5・12(b) に見られるように、壁面近くを除く主流域での RS_i は滑面乱流とほぼ同様な変化特性を示している。一方、粗度の影響が現われる壁面近くでは ejection 及び sweep 事象の寄与率は明らかに滑面乱流と異なっている。すなわち、壁面に近づくと、ejection 事象の寄与率は減少し、一方 sweep 事象の寄与率は増加して、 $\varepsilon \approx 0.1$ で両者はほぼ等しくなるようである。

以上は低速流グループでの実験結果であったが、同様に

して高速流グループから得られた結果が Fig. 5・13 に新たに示される。図に併示した折線は Fig. 5・8 のデータを使って式 (2・118) から計算された理論結果である。 F_r の大幅な変化にもかかわらず実験値は相互にほぼ一致し、また理論曲線との一致も良好であって、これらの結果は Fig. 5・12 の低速流グループのものとはほぼ同じであると考えてよい。

次に、同様に各事象の占有時間率 T_i ($i=1\sim 4$) を簡単に考察する。Fig. 5・14 は低速流グループでの T_i の実測値を示すものであり、図中の折線は式 (2・116) から計算された理論結果である。また、Brodkey らの実験結果も比較のために併示されている。寄与率 RS_i と同様に、占有時間率 T_i の実測値は理論結果及び Brodkey らの実験値と共に良好に一致する。滑面乱流における T_i は $T_4 > T_2 > T_1 > T_3$ となり、 RS_i の大小関係とは異なっている。すなわち、sweep 事象の方が ejection 事象より若干多く出現する。一方、寄与率は ejection 事象の方が大きかったから、単位時間内に発生される Reynolds 応力の強さは ejection 事象の方がより一層大きいといえる。平衡領域までの各事象の T_i はほぼ一定であり、巨視的にいって bursting 現象の生起は ejection と sweep 事象とで各 30% ずつ、interaction 事象で 20% ずつそれぞれ占められる。自由水面領域に移ると各事象の占有時間率は同程度となり、各事象の生起は相互に等しくなる傾向が見られる。次に粗面乱流でも、粗度の影響が現われる壁面近くで ejection と sweep 事象の占有時間率はほぼ等しくなるが、それ以外の主流域では上述した滑面乱流での特性とはほぼ同じであると考えてよい。

以上の結果を総括すると、bursting 現象の各事象が果たす Reynolds 応力への寄与率や占有時間率 (生起確率) は F_r 及び Re にはほとんど依存しない普遍的構造をもつが、壁面の近くでは粗度の影響が明らかに現われる。これらの結果は先述した S^+ 、 S^- 、 D^+ 及び D^- の各パラメータの特性から式 (2・116) 及び (2・118) を用いて得られる理論上の帰結ともいえる。このように Reynolds 応力の内部構造が明らかにされると乱れ発生率 P の構造も一段と明確になる。平均流から乱れへのエネルギー変換率いわゆる正の乱れ発生率を P_p 、逆に乱れから平均流へのエネルギー環流率いわゆる負の乱れ発生率を P_n と定義して、長時間平均をとれば次のようになる。

$$P_p = (RS_2 + RS_4)P, \quad P_n = -(RS_1 + RS_3)P$$

..... (5・8)

当然、 $P = P_p - P_n$ が正味の乱れ発生率であり、この特性は第 4 章ですでに明らかにされている。これまでの結果を使えば P_p 及び P_n は容易に評価でき、その一例が Fig. 5・15 に示される。平衡領域までの負の発生率 P_n は P の約 35% であるが、自由水面領域では P と同程度になっている。

もともと自由水面領域での乱れ発生率は非常に小さく、後述するように bursting 現象自体かなり不明確なものとなるが、この領域では乱れから平均流へと向うエネルギーの還流現象が相対的に無視できない。この還流現象の存在は日野ら (1975) による円管内振動流の実験でも示唆され、²³⁾ さらに検討を加えるべき興味ある現象と考えられる。

5・3・3 壁面領域の乱れ発生機構とその予測

乱れの発生現象 (bursting 現象) は ejection 及び sweep 事象でほとんど起こり、しかしこの現象は壁面領域で最も顕著であることが明らかにされたから、以下では滑面乱流のこの領域における ejection 及び sweep 事象の寄与を考察する。

Fig. 5・16 は実験 A-1 ($R_* = 600$) で得られた ejection 及び sweep 事象の RS_2 と T_2 の実測値及び理論曲線を示したものであり、Brodkey ら ($R_* = 195$) や Lu ら ($R_* = 1800$) の実験結果も比較のため併示されている。 $y^+ \sim R_*$ の自由水面領域に相当する部分は考察対象外であるが、他の領域ではこれらの各実験値は相互に良好な一致を示し、ejection 及び sweep 事象が乱れの発生に果たす普遍的な構造を明らかにすることができる。まず、 $y^+ > 30$ の対数則領域では RS_2 及び T_2 はほとんど一定値を示し、この特性は先述の平衡領域まで成り立っている。平衡領域の上限は $y^+ \approx 0.6 R_*$ であるから、この範囲内での著者の実測値から次のように平均値及びその標準偏差値が得られた。すなわち、 $30 < y^+ \leq 0.6 R_*$ のとき、

$$\left. \begin{aligned} T_2 &\approx 0.29 \pm 0.012, & T_4 &\approx 0.34 \pm 0.008 \\ RS_2 &\approx 0.77 \pm 0.029, & RS_4 &\approx 0.57 \pm 0.029 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.9)$$

Fig. 4・39 や 4・41 からわかるように、式 (5.9) が成立する領域は乱れの発生率と逸散率とがほぼ等しくなる動的平衡状態が認められた領域と一致する。換言すれば、乱れの構造に平衡状態が認められ、その相似性が期待できれば乱れ発生の主要因である ejection 及び sweep 運動は安定した挙動を示し、これらの寄与率は y^+ に無関係な一定値をとるものと考えられる。このような乱れの構造に関する基本的な特性は乱れの物理モデルを考案する際に考慮されねばならない不可欠な知見となり、第 6 章ではこの知見に基づいて乱流モデルが提案される。

次に、本研究では $y^+ < 30$ の実験値は得られなかったが、 $y^+ > 30$ で Brodkey らの結果と良好に一致したことから判断して $y^+ < 30$ の乱れ発生機構は彼らの実験データから考察可能であろう。Fig. 5・16 で示されるように、粘性底層端 $y^+ \approx 10$ に近づくとき RS_2 と RS_4 はほぼ等しくなり、 $y^+ < 10$ の粘性底層では $RS_2 < RS_4$ すなわち sweep 事象の寄与の方が ejection より大きくなるようである。占有時間率 T_2

に関しても粘性底層では $T_2 > T_4$ となり、単位時間内に発生する乱れは sweep 事象の方がずっと大きくなるといえる。このように粘性底層に近づくとき sweep 事象が ejection より重要となるという示唆は Wallace ら (1972)²⁵⁾ や Zarić (1972)²⁶⁾ も与えており、注目される。またこのことは、乱れエネルギーの授受の面からもうかがえる。第 4・7 節で指摘したように、粘性底層は乱れエネルギーの不足領域であり、粘性底層端を介してエネルギーが壁面側に補給されねばならない。この点に関して圧力エネルギーの拡散の寄与は大きいから、Fig. 2・20 の Corino らの観察結果を参照すれば、高速流が粘性底層へエネルギーを与える、すなわち sweep 運動が何らかの寄与していると推測され、上述の示唆と矛盾しないであろう。

さて、乱れの発生機構は $y^+ \approx 10$ の粘性底層端を境として異なるであろうという上述の重要な結果は、これまでに妥当性が十分認められた第 2・6 節での理論結果から予測できないであろうか。これを検討するためには、 $y^+ < 30$ における R , S^+ , S^- , D^+ 及び D^- の変化特性が既知でなければならず、次のように仮定する。

- (1) Eckelmann (1974) の油流実験によれば、 $y^+ < 20$ でも相関係数 R はほぼ一定であり、 $R \approx 0.36$ が得られている²⁵⁾
- (2) S^+ 及び S^- はまだ不十分な値しか得られていないが、Fig. 5・2 から判断して $S^+ \approx 0$ 及び $S^- \approx S_v \approx -S_u$ と近似できる。
- (3) D^+ 及び D^- に関しては現在まったく不明である。このため、乱れの self-consistency すなわち、乱れの相似特性が $y^+ < 30$ の領域にも近似的に適用されると仮定すると、5・2・3 から $D^+ \approx 0$ 及び $D^-/S^- \approx 0.7$ となる。

以上の仮定にもとづくと、 RS_4/RS_2 及び T_4/T_2 が S^- の関数として計算でき、その結果がそれぞれ Fig. 5・17 及び 5・18 に示される。Fig. 5・2 の結果から、 S^- は $y^+ \geq 10$ で正の値をとるが、粘性底層端に近づくとき漸減して零となり、一方 $y^+ \leq 10$ では負の値をとるようである。したがって、Fig. 5・17 から $y^+ \geq 10$ では $RS_4/RS_2 < 1$ すなわち ejection 事象の寄与が、 $y^+ \leq 10$ では $RS_4/RS_2 > 1$ すなわち sweep 事象の寄与がそれぞれ大きくなり、粘性底層端で両者は等しくなるものと予測される。同様に、 $y^+ \geq 10$ で $T_4/T_2 > 1$ 、 $y^+ \leq 10$ で $T_4/T_2 < 1$ という結果が予測される。これらの予測結果は Fig. 5・16 の実測値の特性を良好に説明しており、当初の目的は十分に達せられたものと考えられる。

5・3・4 乱れ発生機構に及ぼす壁面粗度の影響

これまでの実験結果から壁面近くの乱れ発生機構には粗度による何らかの影響が現われることが示唆されたから、さらに詳しい検討を行う。

Fig. 5・19は低流速グループでのすべての実験結果であり、Wallaceら(1972)⁵⁾、Luら(1973)³⁾、Brodkeyら(1974)⁹⁾による滑面乱流の結果も併示する。粗面乱流について現在入手できる実験資料は著者の3ケースのみであり、十分な結論を得るまでには至らないが、次の特性が把握できる。すなわち、壁面粗度が大きくなると RS_1/RS_2 は滑面乱流のものから増大する傾向が見られる。壁面から十分離れた平衡領域以上には粗度の影響は見られず、滑面乱流の値に収束するようである。このように粗面乱流では壁面近くでsweep事象がejectionと同程度かそれ以上の寄与を果たすものと考えられ、この特性はGrass(1971)によっても可視化観測結果から指摘されており、注目すべき結果であろう。

この粗度の影響を第2・6節の理論予測から評価するために、まず S^- 及び D^- の実測値をFig. 5・20に示し、これらの変化特性を検討する(Fig. 5・7から S^+ 及び D^+ に及ぼす粗度の影響は無視できる)。実測値にはばらつきが見られるが、壁面近くの S^- 及び D^- は粗度が大きくなるとほぼ系統的に減少し、その影響範囲は平衡領域のほぼ中央部まで達している。いま $D^-/S^- = 0.7$ と近似すれば、Fig. 5・17から粗度によって S^- が減少すると RS_1/RS_2 は増加するという結果が得られ、上述した粗度の影響が良好に説明できる。換言すれば、乱れ発生機構に及ぼす粗度の影響は S^- 及び D^- の特性から予測できる。これらのパラメータと乱れ拡散率 T_r との間には次の関係式が成立する。

$$T_r = \frac{1}{2} \left(\frac{v'}{u'} \right) \left(\frac{u'}{U_*} \right)^3 \{ Q_{21} + 2 \left(\frac{v'}{u'} \right)^2 Q_{03} \} \quad (5 \cdot 10)$$

式(4・12)と $Q_{21} \equiv D^-$ 及び $Q_{03} \equiv S^-$ から次のように近似できる。

$$T_r \approx 0.28 (u'/U_*)^3 (D^- + 0.6 S^-) \approx 0.36 (u'/U_*)^3 S^- \quad (5 \cdot 11)$$

壁面近くでは u'/U_* にも粗度の影響が現われて減少するから、 T_r は粗度の増加に伴い顕著に減少する結果となる。Fig. 5・20に T_r の実測値を示したが、この粗度の影響が明瞭に把握できる。

以上の結果を総括すると、粗面乱流になり壁面近くの拡散率 T_r が減少すると、sweep事象の寄与は大きくなりejectionと同程度となる。すなわち、ejectionとsweep事象が大半を占めるbursting現象は乱れ拡散率を介して乱れエネルギーの収支と相互に密接な関連があるものと推測される。粗面乱流ほど乱れの等方化指向は強いことが第4章で指摘されたが、この特性と粗面乱流になればejectionとsweep事象の寄与が同程度になるという上述の結果とは矛盾しないと考えられる。

5・3・5 乱れ発生時の速度変動の挙動

以上の点計測データから得られたejection及びsweep事象に関する知見と可視化観測から得られる結果とをいかに関連づけるべきかといった課題は乱れ発生機構の解明に不可欠かつ重要である。しかし、点計測データと可視化観測データとを互に補完させる計測・解析手法は現在でも確立されておらず²⁰⁾、目的に応じて適宜な条件付サンプリング手法を考案しなければならない。第2・6節で点計測データ上のejection事象からejection運動を抽出するフィルター機能をレベル H が果すものと期待されたから、ejectionやsweep運動を点計測データから見い出せないものかを H を変化させて検討してみる¹⁹⁾。

まず、Reynolds応力の変動 w が H 以上となるejection及びsweep事象に關与する u 変動の確率分布 $p_e(\hat{u}|w>H)$ 及び $p_s(\hat{u}|w>H)$ はそれぞれ式(2・125)及び(2・126)から計算でき、その結果の一例がFig. 5・21に示される。Fig. 5・10から $H \approx 5$ ならば $w \geq -H$ ですべての事象を含み、 $p_e(\hat{u})$ や $p_s(\hat{u})$ はFig. 5・1の無条件確率分布 $p(\hat{u})$ にほぼ一致する。ejection事象は、sweep事象と比較して H が大きいとき大きな $|u|$ 、 $|v|$ からの寄与が大きく、 $u < 0$ と $v > 0$ との相関は大きくなり、ejection運動が關与しているものと考えられる。このことをより明確にするために、 $w = H$ で乱れを発生させているejection及びsweep事象の u 変動の平均値 $\hat{u}_e(H)$ 及び $\hat{u}_s(H)$ が検討され、その結果の一例がFig. 5・22に示された。 $\hat{u}_e(H)$ 及び $\hat{u}_s(H)$ の実験値は、数値化された $w(t)$ が H レベルを横切った直後の \hat{u} を平均化した値であり、実線で示された式(2・121)及び(2・122)の理論曲線とは若干の差異を示しているが、両者の一致は比較的よい。当然 $\hat{u}_e < 0$ 及び $\hat{u}_s > 0$ であり、 H が大きいほど乱れの発生に關与する速度変動は大きく、interaction事象がほぼ消滅する5程度のレベルで $\hat{u}_e = -(1.0 \sim 1.5)$ 、 $\hat{u}_s = (1.0 \sim 1.5)$ になっている。可視化法ではReynolds応力の変動ではなく速度変動が観測されるのであるから、 \hat{u} 変動があるレベル u_L に達したときejectionあるいはsweep運動が観察されると考えられる。 u_L がどの程度のレベルであればこのようなcoherentな運動が出現するかを検討することは重要であり、以下の条件付サンプリング手法が用いられる。

$w(t)$ がejectionあるいはsweep事象にあるとき、 $|\hat{u}|$ 変動が基準レベル u_L を増加する方向で横切った時刻を $t = 0$ とし、その前後で観測された $w(t)$ をサンプリングしてアンサンブル平均を行う。Fig. 5・23は、このようにして得られた壁面領域における結果であり、 $u_L = 0.5, 1.0, 1.5$ の3種類が解析されている。 $u_L = 0.5$ ではcoherentな運動は認められないが、 $u_L = 1.0$ にすると $\hat{u} = \pm u_L$ となった直後に $w(t)$ が急増し、ejectionやsweep運動の存在が見い出され、 $u_L = 1.5$ ではさらに明白に認められる。次節で示すようにこのケースのbursting周期は約1秒で

あり、上述の ejection 及び sweep 運動はこの周期内に収まっている。したがって、 u_L を 1 以上にすれば ejection 及び sweep 運動がパルス状に見え、この運動の挙動は可視化観察の結果と矛盾していない。同様に、Fig. 5・24 は平衡領域における ejection 運動を抽出したものであり、 $|\hat{u}|$ が減少する向きに u_L を横切った条件でサンプリング解析された結果も示される。 $u_L = (1.0 \sim 1.5)$ のレベルに $d|u|/dt > 0$ すなわち増加の状態で達すればその直後に乱れが発生し、一方減少の状態で達すれば乱れはすでに発生したものと考えられ、可視化観察の結果に符合している。また、Fig. 5・25 に示される自由水面領域では、 $-\overline{u\tau}$ が零に近くなるため coherent な運動が激しいように見かけ上は表わされるが、 $u(\tau)$ の変動幅が大きく、むしろ全体的に混沌と乱れているようである。

以上の条件付サンプリング結果から、 $\hat{u}_e = -(1.0 \sim 1.5)$ 及び $\hat{u}_s = (1.0 \sim 1.5)$ のレベルに達すれば ejection 及び sweep 運動が検出され、乱れが発生したと考えてよいであろう。そしてこのレベルでは interaction 運動がほぼ消滅するから、現象論上からも矛盾する結果ではないと考えられる。

第 5・4 節 bursting 現象の周期性

5・4・1 bursting 周期に関する従来の研究

Kline ら (1967)³⁾ や Corino ら (1969)²⁰⁾ は、可視化観察から発見された ejection や sweep 運動などの coherent な渦運動は「周期性」をもつと指摘した。そこで次の段階としてこの周期特性を明らかにすることは、bursting 現象がいかなる因子によって支配されているかを判断する上で貴重な知見を与えることとなる。まず問題となる点は「周期性」の把握の仕方とその定義である。Fig. 2・20 で見たように、一連の bursting 過程は文字通りの規則性をもつのではなく、平均的に見れば「周期性」が存在するといったかなりあいまいな周期特性をもつものである。したがって、連続写真上から coherent な運動の生起回数を決定しようとする可視化法は、その判定基準が困難なことからかなりの主観が入り、また多大の労力を必要とする。一方、適当な条件付サンプリング手法を行えば、点計測データからでも coherent な運動の存在が検出できることが前節で示された。このため、点計測データから ejection や sweep 運動を判定する合理的な基準が設定可能となれば、点計測法から得られる「周期特性」は可視化法より客観性を持ち、そのデータ処理はもとより空間性のある coherent な運動を一測点のみで観測するのであるから、実際現象をゆがめて判断する危険性があり、その評価に当っては可視化観察データとの照合が必要である。²⁸⁾

さて、点計測法から bursting 周期を評価した試みは 1970

年代初頭からであり、まず Rao ら (1971) のものが挙げられる。²⁷⁾ 彼らは、境界層流の速度変動 $u(\tau)$ に前節と同様な u_L を設け、 $|u(\tau)| > u_L$ かつ可視化データとの照合結果から与えた経験的な判定条件を満足するとき bursting が生じたとして、その平均周期 \overline{T}_B を決定し、次の実験式を提案した。

$$\overline{T}_B U_*^2 / \nu = 0.65 R_\theta^{0.73} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 12)$$

$$\overline{T}_B U_{max} / \delta_* \approx 32 \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 13)$$

ここで、 $R_\theta \equiv U_{max} \theta / \nu$ 、 δ_* 及び θ はそれぞれ排除厚及び運動量厚である。前節で $u_L \geq 1$ のレベルに設置したとき、coherent な運動の存在が確認されたことから、Rao らの結果は注目される。しかし、彼らの判定基準は複雑であり、物理的根拠に乏しいと Lu ら (1973) は批判している。⁸⁾

次に、Kim ら (1971) は、 u 変動の自己相関関数 $R_u(\tau)$ が $\tau > 0$ で再増加して極大 (re-rise maximum) に達したときの達延時間 τ_0 が可視化法から得られた bursting 周期 \overline{T}_B によく一致することから、逆に $R_u(\tau)$ を解析して得られる τ_0 を bursting 周期と同一視できると提案した。coherent な運動が \overline{T}_B の平均周期で発生し移流されるのであれば、 $\tau \approx \overline{T}_B$ の時間遅れで自己相関は大きくなるはずであり、この Kim らの方法は現象論的に妥当なものと考えられる。しかし、 $R_u(\tau)$ は雑多な coherent 運動を長時間平均したものであるから、 $\tau \approx \overline{T}_B$ で存在するはずの re-rise maximum は平滑化されて小さく、Lu らがこれを「second mild maximum」と呼んでいるように、かなり平坦な極大値となる。このため、後で示すように、second-mild-maximum が現われる達延時間 τ_0 を正確に決定することは困難であり、ときにはこの極大値がデータのばらつき内に埋没して明確には出現しない場合も予想される。実際に Lu ら (1973) は、この極大値が存在しない場合もあり、存在してもこれが必ずしも bursting 周期に対応しない場合もあると指摘している。²⁸⁾ このように、Kim らの方法には無視できない欠陥があるが、データ処理が簡便であり、Laufer ら (1971) はこの方法を用いて粘性底層での bursting 周期を評価し、式 (5・12) が良好に成立することを確かめた。²⁹⁾ そして、平均流速分布に $1/\eta$ 乗則を適用すれば、式 (5・12) は次式とほぼ同等であることを示した。

$$\overline{T}_B U_{max} / \delta \approx 5 \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 14)$$

すなわち、式 (5・12)、(5・13) 及び (5・14) は互いに同等な式となり、bursting 周期は U_* 及び ν の内部パラメータより U_{max} 及び δ の外部パラメータにむしろ支配されているという Rao らの注目すべき指摘を再確認した。

次に、Rao らや Kim らの方法に見られた欠陥を避けるために、Lu ら (1973) は次のような評価方法を新たに提案

した。まず、瞬間 Reynolds 応力 ($-uv$) を計測し、 $w'(t) \equiv -uv/u'v'$ が ejection 事象にくるときを $w'_e(t)$ 、sweep 事象にくるときを $w'_s(t)$ に条件区分した。次に、 $w'(t)$ にレベル H' を設け、 $H'_e \equiv (4 \sim 4.5)$ のレベルではほぼ ejection 運動のみが生じることを Fig. 5・10 と同様なグラフで確認した後、 $w'_e(t)$ が H'_e レベルを横切る個数から ejection 周期 \bar{T}_e を決定した。同様に、 $H'_s \equiv (2.25 \sim 2.75)$ で interaction 事象が消滅するとしてこのレベル設定で sweep 周期 \bar{T}_s が決定された。この方法は、Rao らや Kim らの方法と比較して bursting 現象に則した一歩進んだものと考えられるが、Fig. 5・10 に見られるように H'_e や H'_s の正確な値を決定することは極めて困難であり、この方法による \bar{T}_e や \bar{T}_s の実験値にはかなりのばらつきが避けられない。しかし、ejection 周期と sweep 周期とはほぼ等しく、共に式 (5・13) を満足するという新たな結果には注目される。その後、Brodkey ら (1974)⁹⁾ は Lu らの方法を、Ueda ら (1975)⁴²⁾ は Rao らの方法をそれぞれ若干改良して bursting 周期を求めているが、その決定にはまだあいまいさが残り、より合理的な評価方法の開発が必要である。

5・4・2 bursting 周期の新たな定義

前節で概観したように、従来の bursting 周期の決定方法にはあいまいさがあり、さらに改良が必要と考えられるから、これまでに得られた bursting 現象に関する知見に基づいて、その発生周期を一意的に決定する方法を検討する。

まず Lu らと同様に、bursting 現象の存在を見出す情報源として $w(t) \equiv uv/\bar{uv}$ が用いられる。Fig. 5・26 は ejection 事象が生じたときの $w(t)$ の観測結果を示す代表的な例であり、sweep 事象での $w(t)$ も同様な挙動を示した。 $w(t)$ は非常に断続性のあるパルス波形をしており、ejection 運動は乱れを突発的に激しく発生させるものと再確認できる。このような $w(t)$ のパルスの挙動は Nychas ら (1973) によっても可視化観測から認められ⁹⁾ $w(t)$ が約 40 に達することもあると報告されている。

さて、このパルス波形の平均間隔から ejection 事象の発生周期が決定できるが、可視化観測される ejection 運動の周期そのものではない。したがって、 $w(t)$ のデータから ejection 運動の存在を見出す判定条件が必要となり、第 5・3 節の結果からレベル H が導入される。このとき、 $w(t) \geq H$ となるパルス波形の平均間隔 \hat{T}_e を H に対して示したものが Fig. 5・27 であり、滑面乱流を例にとっている。なお、Rao らの示唆によれば \hat{T}_e は外部パラメータによって支配されると考えられるから、 $\hat{T}_e \cdot U_{\max}/h$ で無次元表示された。 \hat{T}_e は H の増加関数であり、このままでは ejection 運動の周期に対応するものは見い出せない。先述した Lu らの方法では $H = H'/R \approx 10$ に対応する \hat{T}_e が ejection 周期と定義され、これに従えば $\hat{T}_e \cdot U_{\max}/h = (3 \sim 10)$ となり式 (5・14) と同程度となるが、ばらつき幅が大きすぎる。

一方、 $H = 0$ での値を ejection 周期と定義する Brodkey らの方法によれば $\hat{T}_e \cdot U_{\max}/h \approx 1.0$ となり彼らの結果と一致するが⁹⁾ ejection 運動の周期とは見なしがたい。

ところで、 \hat{T}_e は $H \leq 5$ で直線的に増加するが、 $H > 5$ では急増して発散し、 $H \approx 5$ を境に変化特性を異にする傾向が見られる。Fig. 5・28 は H をパラメータにとり、 $\hat{T}_e \cdot U_{\max}/h$ を δ に対して示したものであり、滑面乱流と粗面乱流とを比較している。両者の \hat{T}_e は共に δ の変化にはあまり左右されず、 H が一定であればほぼ一定値をとるようである。自由水面領域以外では $H \geq 5$ で等値線の間隔は急に広くなり、 $\hat{T}_e(H)$ の変化に上述した相異が見い出せる。この原因を明らかにすることは困難であるが、 $H \approx 5$ のレベルで coherent な運動が検出された事実と無関係ではないと考えられる。卑近な例であるが、coherent な運動を示す「大樹」の周辺に小スケールの乱れを示す「下生え」が存在する場合、隣接する「大樹」の間隔をいかに評価したら妥当かという課題と類似していよう。このとき、Fig. 5・26 で示した ejection 運動という「大樹」の周辺には「下生え」がランダムに存在し、これをフィルターするレベルが約 5 であるとすれば、この「下生え」こそが Fig. 2・20 で見られる ejection 及び sweep 運動以外の副次運動、すなわち interaction 事象での運動に相当するものと考えられる。

以上の現象論的考察から、ejection 的平均周期 \hat{T}_e から interaction の平均周期 \hat{T}_{in} を差し引けば「下生え」の影響が打ち消されて ejection 運動を表わす「大樹」のみの発生周期が評価できるものと予測される。Fig. 5・29 は $(\hat{T}_e - \hat{T}_{in})$ を外部パラメータで無次元表示した滑面乱流での結果である。 H が小さいときは interaction 事象の消去効果が強く $(\hat{T}_e - \hat{T}_{in})$ は大きい、 H が大きくなるとこの効果は弱まり、ついには ejection 運動のみが抽出されて Fig. 5・27 の結果にほぼ一致する。したがって、 $(\hat{T}_e - \hat{T}_{in})$ の最小値をもって ejection 運動の平均周期 \bar{T}_e が良好に抽出されたものと見なしてよいであろう。すなわち、次のような判定基準を設け、ejection 及び sweep 運動の平均周期を新たに定義する⁹⁾

(1) H に対する $(\hat{T}_e - \hat{T}_{in})$ 及び $(\hat{T}_s - \hat{T}_{in})$ の最小値をそれぞれ ejection 周期 \bar{T}_e 及び sweep 周期 \bar{T}_s と定義する。

(2) \bar{T}_e 及び \bar{T}_s に対応する H が ejection 及び sweep 運動を検出するレベルであり、それぞれ H_e 及び H_s と定義する。

Fig. 5・29 に見られるように、 $(\hat{T}_e - \hat{T}_{in})$ や $(\hat{T}_s - \hat{T}_{in})$ の最小値は H が若干変化しても停留するから、上述の定義は従来のものと比べてあいまいさが少なく (well-defined)、ejection 周期や sweep 周期を一意的に決定できる。しかし、自由水面近くの $(\hat{T}_e - \hat{T}_{in})$ は H に対して複雑な変化を示し、2 個の最小値をとる場合も現われ、上述の定義が若干不明確となる。これは、自由水面領域での interaction 事象が ejection や sweep 事象と同程度の大きさを占めるから、Fig. 5・28 で見られるようにいわば「下生え」と「大樹」との

区別がつきにくくなるためである。元来この領域での bursting 現象は弱く、その周期特性に関する議論はあまり重要ではないが、boiling 現象などの他の周期特性が現われるならば、これに関する新たな定義や判定基準の開発がさらに必要となると考えられる。

5・4・3 bursting 周期とその分布特性

ejection 及び sweep の平均周期が前節の方法で評価され、低速流グループに関する結果が Fig. 5・30 に示される。また、滑面境界層流での Lu らの実験結果も併示されるが、鉤棒線が彼らの方法による評価のばらつき幅である。さらに、滑面乱流での bursting 周期を Kim らの方法から評価し、図に併示したが、実際に次のようにして求められた。すなわち、50 秒間の $u(t)$ を最大遅延時間 3 秒で自己相関をとり、その計算結果が $X \cdot Y$ プロットで図化された。Fig. 5・31 はその代表的な数例である。bursting 現象が顕著な壁面近傍での $Ru(t)$ には second—mild—maximum が確かに存在するようであるが、他の領域ではそれほど明確には見えず、 τ_0 の位置を見誤る恐れがある。このようにして得られた結果が著者の方法による値と Fig. 5・30 で比較されているが、両者の一致はほぼ良好であり、注目される。

さて、本実験で得られた \bar{T}_e 及び \bar{T}_s の実験値は、 U_{\max} 及び h で無次元表示すれば滑面、粗面乱流の区別なくほぼ一定値のまわりにばらついており、自由水面領域以外ではほぼ次式が成立すると考えられる。

$$\frac{\bar{T}_e \cdot U_{\max}}{h} \simeq \frac{\bar{T}_s \cdot U_{\max}}{h} \simeq (2 \sim 3) \dots\dots\dots (5 \cdot 15)$$

著者の知る限り開水路乱流での bursting 周期を評価した他の研究例はなく、式 (5・15) の妥当性を直接には検証できないが、境界層流で得られた式 (5・14) や Lu らの結果と比較して、少なくともオーダ的には妥当であると考えられる。また、注目すべき点は $\bar{T}_e \simeq \bar{T}_s$ と見なしてよいことであり、これは一連の bursting 現象中に ejection と sweep 運動とが平均して一つずつ存在することを意味している。換言すれば、Fig. 2・20 で模式化された bursting 過程が平均して連鎖的に行われており、可視化観測から得られた bursting 周期 \bar{T}_B に一致する、すなわち $\bar{T}_e \simeq \bar{T}_s \simeq \bar{T}_B$ であると考えられる。

同様に、Fig. 5・32 は高速流グループで得られた bursting 周期を示すものである。この結果は前述の低速流グループでの特性とほぼ一致するようであるが、壁面近くで式 (5・15) より若干小さくなる。高速流グループに対応する可視化観測データは計測が非常に困難なことから得られておらず、^{*)} 詳細な議論はできないところから、高速流グ

ループでも式 (5・15) が大方満足されそうであるとしきれない。

以上の考察から開水路乱流においても自由水面領域以外の bursting 周期は R_e , F_r 及び壁面粗度にはあまり左右されず、 U_{\max} 及び h の外部パラメータに支配されるものと考えてよいであろう。特に、粗面乱流の乱れ発生機構には壁面近くで粗度の影響が現われたにもかかわらず、bursting 周期にはこの影響があまり現われない事実は、bursting 周期が内部パラメータよりむしろ外部パラメータによって支配されることを示している。

Fig. 5・33 は、ejection 及び sweep 周期に対応するレベル H_e 及び H_s を Fig. 5・27 から求めた結果を示したものである。 H_e 及び H_s は粗面乱流の方が若干小さめであるが、 $H_e \simeq (3 \sim 6)$ 及び $H_s \simeq 3$ が認められ、これらは interaction 事象が消滅するレベルにほぼ相当するものと考えられる。また、 \bar{T}_e 及び \bar{T}_s が評価されるレベルでの速度変動強度 \hat{u}_e 及び \hat{u}_s が Fig. 5・34 に示される。これらの値は $\hat{u}_e \simeq 1.4$ 及び $\hat{u}_s \simeq 1.3$ であり、ejection 及び sweep 運動が検出できるレベルに達していると Fig. 5・23～5・25 から判断できる。したがって、本研究で提案された bursting 周期の評価方法や判定基準は現象論的に目下の処妥当であると考えられる。

これまで bursting 現象の平均周期に関して考察してきたが、個々の ejection 及び sweep 運動はかなりランダムに発生すると予想されるから、次にこの周期 T の確率分布特性を検討する。bursting 周期 T は対数正規分布にほぼ従うのではないかという Rao ら (1971) の示唆に基づいて²⁷⁾ 滑面乱流の ejection 周期を例にとり Rao らが行ったと同様に $\log(T/\bar{T})$ を正規確率紙に示した結果が Fig. 5・35 である。なお、Fig. 5・23～25 に示されているように計測時間内 (50 秒間) での bursting 現象の発生個数は 50 個程度であるから、正規確率紙には Hazen プロット法で図示されている。 $\log(T/\bar{T})$ の実験値にはかなりのばらつきが見られるが、直線にほぼ乗るようであり、この適合性は壁面近傍ほど良好である。また、Kim ら (1971) の可視化観測データにも良好な適合性が見られる。²¹⁾ したがって、これらの実験結果に関する限り、上述した Rao らの示唆は妥当であると考えられる。

さて、bursting 周期 T の確率密度関数 $p_T(T)$ が対数正規分布をするのであれば、次式が与えられる。

$$p_T(T) = \frac{(\log e)}{\sqrt{2\pi} \sigma_0 T} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_0} \log T/T_0 \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (5 \cdot 16)$$

データから Kim らの方法を用いて Rao ら (1971) が得た結果が唯一のものである²⁷⁾。しかし、Willmarth ら (1973) は自分らのデータが不正確であったことから、Rao らの結果に疑問を投げかけている。²⁸⁾

*) 大きな Re での bursting 周期は、Willmarth ら (1966) の

ここで、 $\log T_0 \equiv \overline{\log T}$ 、 $\sigma_0 \equiv \{(\log T/T_0)^2\}^{1/2}$ 及び $\log e \equiv 0.4343$ であり、また次の恒等式が成立する。

$$\int_0^\infty T^2 p_T(T) dT = T_0^2 \cdot \exp\left(\frac{\sigma_0^2}{2K^2}\right),$$

$$K \equiv (\log e)/\sigma_0 \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 17)$$

式(5・17)から T の平均値 $\bar{T} \equiv T_B$ や標準偏差 σ_B が容易に計算でき、^{*}変動係数 $\psi \equiv \sigma_B/T_B$ を使って次のように示される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &\equiv (\log e)/K = (\log e) \sqrt{\ln(1+\psi^2)} \\ T_0 &\equiv \tau T_B, \quad \tau = \exp\left(-\frac{1}{2K^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 18)$$

T_0 は T の幾何平均、 $\bar{T} \equiv T_B$ は算術平均からそれぞれ計算されるが、 τ は両者を結びつけるパラメータであり、変動係数が零であれば当然 $\tau = 1$ 、すなわち $T_0 = \bar{T}$ となる。

Fig. 5・36は、式(5・18)から計算された T_0 及び σ_0 を使って T を正規化した $\sigma_0^{-1} \log(T/T_0)$ を正規確率紙に図示した結果である。図の右半分は滑面乱流、左半分は粗面乱流の実験結果であり、また式(5・16)が実線で示されている。実験値には若干ばらつきがあるが、式(5・16)との一致はいずれもかなり良好である。図面の繁雑さを避けるために sweep 周期は壁面領域のものに限って併示されたが、同様に式(5・16)の適合性は良好である。Kimら及び著者ら(1977)による可視化観測からも式(5・16)の適合性が確認されている³⁰⁾

以上の実験結果から、ejectionとsweepとを包含した個々のbursting現象の発生周期は、滑面や粗面の種類によらず、ほぼ対数正規分布に従うものと結論できる。そして、この結果は第6章で述べるbursting現象のモデル化に当って有用な知見を与えるものである。

最後に、bursting周期のばらつき程度を表わす目的で変動係数 ψ の実測値がFig. 5・37に示された。本実験の点計測データに関する限り、 ψ は乱流場全域ではほぼ一定の1～2という相当大的な値をとっている。一方、Kimらによる境界層流の可視化データではたかだか0.5程度である。この点計測データと可視化データとの差異は大きく、これが何に起因するものかは不明であるが、境界層流を対象とした従来の研究結果と比較して平均周期 \bar{T} が小さく、したがって $\psi = \sigma_B/\bar{T}$ が大きく評価された可能性がある。すなわち、coherentな運動の判定基準レベル H がより大きくとられる必要があるかも知れない。また、分散 σ_B^2 には空間的広がりをもつcoherentな運動を点計測する際に一種の「む

ら」が混入されている危険性も推測される。このような不明な点を解決するためには、可視化と点計測との同時併用法の確立がまず急務であると考えられる。

第5・5節 乱れ発生機構の二面構造的性

以上が本章で得られた乱れ発生機構に関する主たる実験結果であり、これらからbursting現象は内部及び外部パラメータに同時に支配されているのではないかという二面構造的性の存在が示唆される。これに関する知見は現在でも非常に乏しく、十分な裏付けも得られないが、これまでの結果を総括する意味での考察を行い、今後の研究発展への礎とする。

5・5・1 内部及び外部パラメータへの依存性

bursting現象の平均周期 T_B は、式(5・14)や(5・15)で示されるように外部パラメータに支配されるようである。この外部パラメータ表示が R_e 、 F_r 及び壁面粗度とは完全に独立な普遍性をもつかはさらに検討を要するが(Morrisonら(1971)は R_e が十分大きくなると乱れの構造は大胆(dramatic)に変化するかも知れないと示唆している³¹⁾)、少なくとも内部パラメータ(U_* 及び ν/U_*)より外部パラメータ(U_{\max} 及び h)を用いた表示の方が普遍的であることは当面は認められる実験的事実であろう。一方、第4章での実験結果によれば、壁面領域の乱れ特性は内部パラメータで、主流領域(平衡領域及び自由水面領域)の乱れ特性は外部パラメータでそれぞれほぼ良好に普遍表示された。すなわち、当然両領域間には乱れエネルギーの授受があり、相互作用が存在するが、各領域を独立に扱ってその乱れ特性を考察することが可能であった。この事情は境界層流でもまったく同様であって、内部層と外部層とがほぼ独立して扱われ、³²⁾ Antoniaら(1971)によっても再確認されている³³⁾

以上の事実に基づけば、bursting現象が最も著しい壁面領域での乱れ構造は内部パラメータのみならず外部パラメータにも積極的に依存している可能性が強い。すなわち、bursting周期が外部パラメータによって規制されているということは、主流領域(外部層)の乱流特性が引金(トリガ)となって乱れの発生源であるbursting現象そのものが生起することを意味している。このようなbursting現象の二面構造的性はいかなる物理機構から説明されるのであろうか。また、壁面領域の乱流特性は内部パラメータのみによって表現されるという従来の知見は新たに塗りかえられる必要があるだろうか。

これに対する答は現在なく、今後の乱流研究の進展にまつ所が大きいから、次のLauferら(1971)の示唆は注目に値しよう²⁹⁾。彼らは、境界層端に存在する乱流域と非乱流域との「wavy」な境界面(Kovasznyら(1970)³⁴⁾のいう

^{*} これまでの結果から $\bar{T}_e \equiv \bar{T}_0 \equiv \bar{T}_B$ と示されたから、bursting周期 T の平均値 \bar{T} でこれらを代表させてよい。以下においてbursting周期を強調する意味で \bar{T} を T_B と表記することもある。

「bulges」な運動)の平均的波長の移流時間 T_L が Kovasznay らの計測データから $T_L \cdot U_{\max} / \delta \approx 2.5$ であることを指摘し、この境界層端の「bulges」な運動と内部層の coherent な運動との間の関連性を示唆した。すなわち、bursting 現象は境界層端での大きなスケールの intermittency によって励起されるのではないかというのである。一方、水面変動が無視できる通常の開水路乱流にはこの「bulges」運動に相当するものは存在しないが、前節までの結果から明らかにように bursting 現象は実際に生起している。この事情は管路流でもまったく同様であり、実際に Corino ら (1969) は管路流でも bursting 現象が生起することを見出した²⁰⁾ したがって、少なくとも開水路流や管路流での二面構造性の説明には Laufer らの示唆は決め手とはならず、他の物理機構を見出さねばならない。

さて、乱れの発生に関与するスケールはマクロ・スケールであり、 L_x で代表できた。また乱流場全体を占める最大渦径(平均流スケール)を L_0 とすれば、 $L_0 \approx h$ であり、主流領域で $L_0 \sim L_x$ となる。これまでの知見によれば、この最大渦の発生・崩壊こそが平均流からの乱れ発生の第一段階と考えられる (Fig. 2・5 参照)。この渦の発生・崩壊機構は不明であるが、 L_0 なるスケールの円柱後流渦、すなわち Karman 渦の発生・崩壊に対応するものとする。最大渦の崩壊は渦動粘性係数 ϵ_m に支配される(粘性小領域に対応する最小渦の崩壊は動粘性係数 ν に支配される)と考えられるから、Karman 渦での Reynolds 数 $R_K \equiv U_{\max} \cdot L_0 / \nu$ に対応する最大渦での Reynolds 数は $\tilde{R}_K \equiv U_{\max} \cdot L_0 / \epsilon_m \approx (h U_* / \epsilon_m) (U_{\max} / U_*)$ である。通常の乱流では $U_{\max} / U_* \approx 25$ 及び $\epsilon_m / h U_* \approx 0.07$ であるから³⁵⁾ $\tilde{R}_K \approx 350$ となり、ちょうど安定した Karman 渦の発生条件の Reynolds 数の範囲内にある。最大渦と Karman 渦との発生・崩壊機構にこのような類似性が認められるとすれば、Strouhal 相似性が成立して両者の Strouhal 数 St は等しいであろうと推測される。このとき、Karman 渦の発生周期を T_K とすれば次式が成り立つ。

$$St_K \equiv L_0 / (T_K \cdot U_{\max}) \approx L_0 / (T_B \cdot U_{\max}) \equiv St_B \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 19)$$

したがって、

$$T_B U_{\max} / h \approx (St_K)^{-1} (L_0 / h) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 20)$$

$\tilde{R}_K \approx 350$ に対応する円柱の Karman 渦の St_K はほぼ一定で約 0.2 となり³⁶⁾ また Fig. 4・31 から $L_0 / h \approx 0.8$ となる^{*)} したがって、

$$T_B U_{\max} / h \approx 4 \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 21)$$

式 (5・21) は式 (5・14) や (5・15) と同程度であり、上述のような最大渦と Karman 渦との発生・崩壊機構に関する現

象論的な類似性から bursting 周期の外部パラメータ依存性を説明することもできよう。

以上のような bursting 現象の二面構造性が認められるとすれば、これに伴う coherent な渦運動も二面構造性をもつものと予測される。いま、この運動の x 方向(主流方向)への平均的拡がりスケールを $\bar{\lambda}_1$ 、移流速度を U_c とすれば次式が成立する。

$$\bar{\lambda}_1 / h \approx \left(\frac{T_B \cdot U_{\max}}{h} \right) \left(\frac{U_c}{U_{\max}} \right) \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 22)$$

Hinze (1975) は Schubauer らの境界層流の実験結果に基づいて $U_c \approx 0.8 U_{\max}$ であると仮定した³⁵⁾ 開水路流でも同程度の値が期待でき、また最大渦が主流域全体として移流されることを考えれば、対数則を適用して $U_c \approx U_m \approx 0.9 U_{\max}$ と見なしてもよいであろう。このとき、式 (5・14) や (5・15) から

$$\bar{\lambda}_1 / h \approx (2 \sim 3), \quad \bar{\lambda}_1 / \delta \approx 4 \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 23)$$

となり、coherent な運動の x 方向スケール λ_1 は外部パラメータに支配されるようである。実際 Clark ら (1971) は、 y^+ の増加と共に $\bar{\lambda}_1 \equiv \bar{\lambda}_1 U_* / \nu$ は漸増し、 $\bar{\lambda}_1^+ \approx (400 \sim 1000)$ となることを境界層流で可視化観測したが³⁷⁾ Hinze (1975) によれば $\bar{\lambda}_1^+$ は R_K に依存するからむしろ外部パラメータで表示した方がよいようであり、このとき上述の $\bar{\lambda}_1^+$ の値はほぼ式 (5・23) を満足した³⁸⁾

一方、この coherent な運動の z 方向(横断方向)への平均的拡がりスケール $\bar{\lambda}_3$ は内部パラメータで支配されることが知られている。すなわち、 $\bar{\lambda}_3$ は Kline ら (1967) が見出した高速・低速渦の平均間隔に相当するから容易に計測でき (Fig. 5・44 参照)、次式が提案されている³⁾

$$\bar{\lambda}_3^+ \equiv \bar{\lambda}_3 U_* / \nu \approx 100 \quad \dots\dots\dots (5 \cdot 24)$$

式 (5・24) の妥当性は Kim ら (1971) をはじめ多くの研究者による可視化観測から確認され²¹⁾ 著者ら (1977) の可視化観測でも壁面領域で再確認された³⁰⁾ また、Gupta ら (1971) はこの妥当性を点計測法から確かめた³⁹⁾

以上を総括すると、coherent な運動の z 方向(横断方向)への拡がりとは式 (5・24) のように内部パラメータで、一方 x 方向(縦方向)への拡がりとは式 (5・23) のように外部パラメータでそれぞれ表示される。すなわち、壁面領域での bursting 現象に伴う coherent な運動は内部パラメータのみならず外部パラメータにも規制され、この現象はむしろ外部パラメータが引金となって生起し、流下方向へ拡がり

*) 最大渦径 L_0 として自由水面領域の L_x を用いたが、乱流場全体を対象としていることを強調する意味で、 L_x の断面平均値 \bar{L}_x を用いた方がより合理的であるとも考えられる。このとき $\bar{L}_x / h = \int_0^1 (L_x / h) d\epsilon \approx \int_0^1 \sqrt{\epsilon} d\epsilon = 0.67$ であり、 $T_B U_{\max} / h \approx 3.3$ となり、式 (5・15) により近くなる。

をもつものと考えられる。このような coherent な運動の挙動を模式的に表わした一例が Fig. 6・6 で示す Hinze (1975) のモデルであり³⁵⁾、第 6 章で検討される。

したがって、壁面領域と主流領域との相互作用は当初予想していたよりはるかに強いようであるが、乱流構造に関する従来の知見を根底から覆すほどのものとは考えられない。この点に関して最近著者ら (1977) は次のような注目すべき結果を得た³⁰⁾ すなわち、Fig. 5・44 に示すような水素気泡列から得られる高速・低速渦の間隔 λ_3^+ の確率分布特性を検討し、その結果の代表例を Fig. 5・38 に示した。壁面領域で観測された λ_3^+ の確率分布 $p_\lambda(\lambda_3^+)$ は R_τ や y^+ にほとんど関係なく対数正規分布、すなわち

$$p_\lambda(\lambda_3^+) = \frac{(\log e)}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\lambda_3^+}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{\lambda_3^+}} \log \lambda_3^+ / \lambda_{30}^+ \right)^2 \right\} \quad (5.25)$$

に良好に従うことが判明した。また、変動係数 $\phi_\lambda = \sigma_{\lambda_3^+} / \bar{\lambda}_3^+$ は y^+ の位置によらずにほぼ 0.5 となった。これらの λ_3^+ の確率分布特性は先述の bursting 周期 T とほぼ同じである。式 (5.22) から λ_1 は T と比例関係にあるから、結局 coherent な運動の空間スケール λ_1 及び λ_3 は共に対数正規分布に従うものと考えられ、この渦運動の発生・崩壊現象には対数正規性が何らかの形で関与するものと予測される。

以上の結果を総合して考えると、bursting 現象は内部パラメータのみに支配されるとか、内部及び外部の両パラメータがまったく独立して支配するとかいうよりも、両パラメータが self-consistent に共存し、かなり重複して支配しているといった方が自然であろう。この意味で bursting 現象、広義に言えば壁面領域の乱れ特性は内部及び外部パラメータに同時に依存した二面構造性をもつものと考えられよう。

5・5・2 二面構造性に関する今後の研究課題

前節で bursting 現象は二面構造性をもつことが示唆されたが、これが事実なら、乱流中に性質の異なる 2 種類の乱れ成分が共存しているとも考えられる。例えば、第 4 章で導入された「active・inactive 成分」という Bradshaw (1967) の乱流区分に注目すると³⁶⁾ inactive 成分は乱流場全体に影響を及ぼす低周波変動（一種のゆらぎ）成分であるから、外部パラメータと密接に関係し、一方 active 成分は局所的な普遍的特性をもつものであるから、壁面領域では内部パラメータと密接に関係するであろう。これが事実ならば、二面構造性とは active・inactive 成分区分にほかならず、実際 Rao ら (1971)²⁷⁾ や Grass (1971)²⁸⁾ はこの考えに立脚しているようである。しかし、inactive 成分は本来 Reynolds 応力の発生すなわち乱れの発生に寄与しない成分であり、事実低速流グループのように inactive 成分が弱い流れでも bursting 現象が生起していた。したが

って、二面構造性と active・inactive 乱流区分とを短絡的に結びつけることは早計であろう。一方、Kim ら (1971) は「波動」とみなせる成分を「organized」、残りの成分を「unorganized」とする区分を提案し、二面構造性に対応づけようとしたが、不完全な結果に終わっている²¹⁾。

以上のように、二面構造性が乱れのいかなる物理機構から生じるものなのか、またせん断乱流は本質的に二面構造性を有するものなのかという課題は依然として不明であり、今後の乱流研究で解明すべき重要な課題であると考えられる。この解決に当って多分有益な示唆となる以下のことを提言し、本節を締めくくことにする。

まず、Reynolds 応力の発生すなわち乱れの発生は強い intermittency をもつことが大きな特徴であった。これは、先述した最大渦の崩壊が intermittent であることを意味し、実際に ejection や sweep 運動は非常に短時間のうちに突発的に生起することが可視化観測されている。一方、bursting 現象が発見される以前に Batchelor (1953)⁴⁰⁾ や Sandborn (1959)⁴¹⁾ は乱れの微細構造を研究し、高波数成分ほど Gauss 分布からずれることから、この構造は本質的に intermittent であろうと指摘した。すなわち、粘性逸散となる最小渦（ミクロスケール）の崩壊は本質的に intermittent であり、渦度集中とそれに伴う乱れエネルギーの熱放出機構とが局所的に起こることを示唆した。しかも、この最小渦の intermittency は壁面からの距離 y にはほとんど依存しなかった。

以上のことから、乱れの発生に携わるマクロスケールの渦の崩壊及び乱れの逸散に携わるミクロスケールの渦の崩壊は共に intermittent に起こることが乱れ構造の本質であると考えられ、両スケールの間には従来考えられていた以上に深い関連が存在するのではないかと示唆される。先述した bursting 周期の各評価方法のうちで Rao らや Ueda らの方法はむしろミクロ・スケールの intermittency に着目し⁴²⁾ 一方可視化法や Kim らや Lu らや著者の方法はマクロスケールの intermittency に着目したものであるが、両者から評価された周期特性がほとんど同じであったことは、マクロ及びミクロの両スケール間に何らかの相互作用が存在することを示している。

この点に議論が及ぶと、次に引用する Molloy-Christensen (1973) が行った intermittency に関する総括は示唆的である⁴³⁾ すなわち、『乱れを発生させる bursting 現象は、その初期段階で相互に発達を促しながら、雑多な渦の間に強い相互作用を及ぼし、小さなスケールの渦が大きなスケールの渦からエネルギーをより効果的に引き出すようにあたかも触媒として働くのではないか。そして、乱れの発生が intermittent である以上、その最終的な熱逸散も intermittent であろうし、結局 intermittency は異なる渦スケール間の非線形な相互作用の結果であると考えられないか。』この物理機構が肯定されれば、渦の崩壊はすべて局所的

に intermittent であると考えられ、この崩壊こそが異なるスケール間のエネルギー授受を起こしているのであろう。すなわち、Fig. 2・9の「給水管」モデルにおいてエネルギーの流れは連続的というよりむしろ間欠的におこり、Kolmogoroff (1962) が指摘したように、逸散率は時間的に変動することを考慮しなければならないであろう⁴⁾したがって、マクロからミクロのスケールへと移行するいわゆるカスケード過程も当初考えていたよりずっと複雑であると推測され、これらは intermittent におこる渦の崩壊機構と関連させて今後解明されるべきである。この際に、次のGurvichら(1967)の渦崩壊機構論は注目に値する。彼らは渦の崩壊が self-similarity である、すなわち任意の乱れ特性値 $\varphi (> 0)$ が異なる渦に対応するそれぞれの φ の比はその渦スケールの比に比例すると仮定して、 φ は対数正規確率分布に従うことを導いた。いま、 φ として渦の崩壊周期に相当する bursting 周期 T を選べば、 T は式(5・16)の対数正規分布に従うし、 φ を渦のスケール λ_3 にとれば、やはり λ_3 は式(5・25)の対数正規分布に従うから、bursting 現象の対数正規性は渦崩壊機構の self-similarity から説明できるかも知れない。この self-similarity は本研究で導入された self-consistency と同じ概念に立脚するものではないかと考える。

Fig. 2・13で示したように、スペクトル構造と乱流構造とは良好な類似性がある。したがって、スペクトル空間上での渦の発生・崩壊(エネルギーの高波数移行)は乱流空間上での渦の発生・崩壊と類似な機構をもつものと推測される。渦の発生・崩壊の本質は intermittent であり、これは渦間の強い相互作用の存在を反映したものと考えられる。すなわち、現在著者は、Mollo-Christensen の示唆を支持する立場にあり、乱れの二面構造性はこの渦の崩壊機構に起因しているのではないかと推測している。

第5・6節 bursting 現象の可視化観測

更めて指摘するまでもなく、点計測法のみによって乱れの発生機構すなわち bursting 現象を解明することは困難であり、その上誤った解釈をする危険性があるから、この現象の可視化観測が不可欠となる。元来、bursting 現象が発見され、乱れの発生機構に関する研究が盛んになったのも、この可視化観測が先駆的な知見を与えたからであり、また第6章で検討される乱れのモデル化にもこれが多大の寄与を果たしている。

このような可視化法の重要さに鑑みて、本研究でも当初から点計測法と並行して可視化法の開発に努力してきた。その結果、bursting 現象の定性的な観測では、これまで多くの研究者が得た結果を再確認できたが、定量的な観測では第3章で指摘したようにデータ処理上で改善すべき点が多く、多大な労力をかけた割には満足すべき結果は数少な

かった。しかし、開水路乱流特に粗面乱流での可視化観測例が少ないことから、以下では本研究で得られた特筆すべき結果のみを簡単に述べる。

5・6・1 垂直面内の瞬間流速分布形状

開水路の滑面及び粗面乱流いずれでも bursting 現象が実際に生起することを Grass (1971) が見出ししたが、これを確認し、さらに著者の bursting 現象に関する認識を明確にする目的で、Table 4・1(c)の低速流グループを対象にして水素気泡法による可視化観測を行った¹⁰⁾。約2mm間隔に絶縁された直径0.1mmの白金線が水路床からy方向に垂直に張られ、これから生じた水素気泡列を観測することによって垂直面内の瞬間流速分布が得られた(Fig. 3・16参照)。水素気泡列の連続撮影には16mm高速度カメラ(ボレックス社製)が使われた。

Fig. 5・39は、ケースD-1を例にとり、一連のフィルム群から ejection 及び sweep 運動と見なせる一コマ写真を載せたものである。No. 1 から 4 までの写真は ejection 運動を、No. 5 から 9 までは sweep 運動をそれぞれ示していると思われる。浮力の影響を考慮しなければならないが、これらの写真は従来の可視化観測結果と同様であり、ejection 運動は sweep 運動より強烈に起きることがわかる。すなわち、低速流の浮上に伴ってx方向の回転渦が存在し(例えばNo. 1や2の写真)、その後強い ejection 運動の生起が観察された(No. 3の写真)こともあり、これらは Kline ら (1967)³⁾ や Kim ら (1971)²¹⁾ の観察結果と一致する。一方、sweep 運動は確かに壁面方向に向うが、壁面となす角度は小さく、これは Corino ら (1969)²⁰⁾ が得たのと同様な観察結果である。

次に、第3・4節で確立された解析法に従って連続写真上の気泡群の座標が読み取られ、瞬間流速(\tilde{u}, \tilde{v})が得られた。Fig. 5・40は滑面乱流の瞬間流速分布を示すものであり、平均流速分布が太い実線で併示されている。この平均流速は163枚の連続コマ写真から決定されたものであるが、対数則分布に良好に従うことが確認された¹⁰⁾。なお、時刻 t は撮影開始を $t = 0$ としている。式(5・15)から bursting の平均周期は $T_B \approx (2 \sim 3) h / U_{\max} \approx (1.0 \sim 1.5)$ 秒であるから、ほぼ一つの bursting 現象を観察し得るように連続したコマ写真を8枚任意に選び、図示したものが Fig. 5・40(a)及び(b)である。Fig. 2・20の(1)事象に相当する bursting 現象の開始時点をこれらのコマ写真から見出すことは困難であり、またそれほど重要とは思われないが、一周期当りの bursting 現象で起こる流速変動の挙動を示しているものと考えられる。coherent な運動は上流側から移流されるから、bursting 事象の生起順序は Fig. 5・40の一連の流速分布群上では時間経過と逆向きである。(a)及び(b)の流速分布群で $u = \tilde{u} - U$ が負となる低速部が時間経過と共に浮上し、Kline らのいう「lift up - ejection 運動」を良好にとらえていると理解できる。低速領域の直

上では流速勾配が比較的大きく、強いせん断層の存在が示唆されるが、このような挙動はCorinoらやKimらによる観察結果とほぼ同じである。 \bar{u} に及ぼす浮力の影響を取り除くために、 $\bar{v} = 0$ すなわち $\bar{v} \equiv v$ と簡単に補正したが、このような可視化技術やデータ処理技術の不完全さから \bar{u} の精度は \bar{u} より劣ると考えられる。この \bar{u} の分布形から上述のliftup-ejection運動には \bar{u} が正となる相関が強いことがわかる。

このような低速部や高速部がいかなる挙動を示し、速度 \bar{u} とどのような相関をもつかを検討するために、Grassが行ったと同様な条件付サンプリング手法を用いてbursting現象の平均化された流速分布形を解析してみる。ケースA-1の滑面乱流を対象とし、連続コマ写真総数160枚を8グループに区分けした。各グループには連続した20枚のコマ写真があり、この経過時間はFig. 5・40から $0.184 \times 20 = 3.7$ 秒であるから、bursting現象の平均周期 $T_B (= 1.0 \sim 1.5$ 秒)よりずっと大きく、各グループには少なくとも1つのbursting現象、すなわちcoherentな運動が存在していると期待できる。このとき、各グループに関して任意の測点 $p_i (i = 1 \sim 12)$ で \bar{u} が最大及び最小となるコマ写真を抽出し、グループ平均を行って、 p_i で \bar{u} が最大及び最小となるとき瞬間流速の平均的挙動が得られる。Fig. 5・41及び5・42は、 \bar{u} が各測点 p_i でそれぞれ最小及び最大をとるときの平均的形である。 \bar{u} が最小を示す該当測点 p_i の近隣で $u < 0$ 及び $v > 0$ となる領域を、また \bar{u} が最大を示す測点では $u > 0$ 及び $v < 0$ となる領域をそれぞれ黒く塗りつぶしてある。Fig. 5・41の黒く塗りつぶした領域は測点 p_i で低速部が最も発達したときの流速分布形状であり、一方Fig. 5・42は高速部が最も発達したときの流速分布形状と考えられる。bursting現象に関する定量的評価は今後の検討とするが、定性的な考察はこれらの流速分布形状から行うことができる。低速部には $\bar{v} > 0$ すなわち浮上速度がほぼ伴い、Kimらのいう低速縞のliftup-ejection運動が存在するものと確認できる。同様に、高速部には $\bar{v} < 0$ すなわち下降速度がほぼ伴い、sweep運動が確かに存在するものといえる。

これら一連の流速分布形状で注目すべき点は、低速部はほぼ自由水面近くまで浮上速度をもち、すなわちliftup-ejection運動が壁面から十分離れた所まで存在し、ときには自由水面まで到達する可能性すらあるのに対して、高速部は自由水面近くでほとんど下降速度を失い、すなわちsweep運動がここでは衰退するものと考えられることである。このように、ejection運動は乱流場全体に波及して自由水面までも及ぶ可能性があることをGrass (1971)は指摘し、自由水面上で観察されるといわれているboiling現象(自由水面の盛り上がり・浮上現象)そのものではないかと推測している。²²⁾ この点に関してすでに余越(1970)は、boiling現象を河床付近で生じる渦が自由水面まで発達したものであろうと示唆し⁴⁰⁾ 著者ら(1974¹⁰⁾、1976⁴⁷⁾、1977³⁰⁾)もbursting現象とboiling現象とは何らかの

関連があるものと推測して可視化法からこのことを確認しようと試みているが、この真偽を証すデータはまだ得られず、今後の研究にまつ所が大きい。

5・6・2 水平面内の瞬間流速分布形状

前節で行った初歩的な可視化観測の結果、Klineらのグループが見い出した高速・低速縞の挙動がbursting現象で重要な働きを演ずるものと考えられ、この挙動を観察するために水平面内の瞬間流速分布を連続撮影することにした。前節で用いたFig. 4・1の実験水路は水素気泡の観測技術の上からは大型化すぎることが経験上判明したから、あらゆる視角から可視化観測が可能でかつ操作容易な専用水路(長さ8.5 m、幅30 cm、高さ30 cm)を新たに設置した。次に、Reynolds数を層流から乱流に及ぶ広範囲に変化させ、乱れの発生機構特に高速・低速縞が R_e によっていかなる挙動を示すかに焦点をあてて可視化観測を行ったが、以下ではこの観測から得られた基礎的結果(1976)を簡単に列挙するとともに、詳細な検討は別の機会に発表することとする。

さて、3種類の滑面乱流に関して可視化実験を行った。すなわち、 $R_e = 340$ ($R_* = 32$)の層流、 $R_e = 1600$ ($R_* = 110$)の十分には発達していない乱流及び $R_e = 5100$ ($R_* = 300$)の十分に発達した乱流を対象とした。摩擦速度 U_* は同時に計測された垂直面内の平均流速分布から決定され(4・3・1の第2法)、また水深 h は各ケース共6.0 cm、水路幅 B は30 cmであり、 $B_* \equiv BU_*/\nu = 5 R_*$ となった。水路幅全体にわたる流速分布形状を視野に入れるため35 mmモータ・ドライブカメラ(ニコン社製)が使われた(Fig. 3・16参照)。Fig. 5・43及び5・44は $R_e = 340$ 、1600及び5100でそれぞれ得られた水素気泡列の一コマ写真であり、各コマ写真の上辺に白金線が写っている。まず、 $R_e = 340$ での気泡列はほとんど乱れず、層流となっている。次に、 $R_e = 1600$ の流れに関して $\delta = 0.7$ の自由水面近くでは顕著な乱れは観察されず、ほぼ層流状態と考えられるが、一方壁面近く($y^+ = 22$)では高速・低速縞が明瞭に現われ、乱れが発生していることがわかる。この高速・低速縞の挙動を若干追跡するために、時間を追って観察した結果を組写真で載せている。両側壁近くには側壁の拘束条件が現われるが、この拘束が弱い水路中央部では高速・低速縞はかなり不規則に発生するようであり、 x 方向にも時間的に変動している。水路幅を十分大きくとり、側壁の影響が無視できる2次元乱流場を設定することが理想的であるが、本研究で行った初歩的な可視化観察でも高速・低速縞は時間的及び場所的に不規則に発生することが確認でき、Klineらの指摘を裏付ける結果が得られた。前節で述べたように最近著者ら(1977)は、この高速・低速縞の間隔 λ_3 の統計的特性を検討した結果、壁面領域では $\lambda_3^+ \approx 100$ を満足し、対数正規分布に従うことを見出した³⁰⁾ また、隣接

する高速・低速縞が時間的に合体したり、分裂したりする挙動を観測したが、³⁰⁾ これらの機構は今後明らかにしたい。ともかく、Fig. 5・43の初歩的な可視化観測でも水路幅全体に5個の低速縞が見い出せるから、 $\lambda_3^+ \approx B_*/5 = R_* = 110$ となり、確かに式(5・24)と一致する。

最後に、 $R_* = 5100$ の乱流では、白金線の位置を7通りに変えて各ケースでの水素気泡列の形状を観測した。Fig. 5・44の第1番目の写真は $y^+ = 5$ の粘性底層内の流速分布形をとらえたものである。Einsteinら(1956)が指摘したように、粘性底層内といえども流速はかなり複雑に変動しており、⁴⁸⁾ $R_* = 340$ の層流とは明らかに異なっていることがわかる。また、高速・低速縞が明瞭に観察され、 $y^+ = 10$ の粘性底層端でもこの縞模様は明瞭であり、相当に複雑な挙動をすることがわかる。同様に、乱れエネルギーの発生率 P や乱れ強度 u' がほぼ最大となる $y^+ = 15$ の位置でも高速・低速縞が明確に現われる。この位置で高速・低速縞の挙動を時間を追って観察した結果、個々の縞は場所的・時間的にかなり不規則に現われることが明らかにされた。次に、 $y^+ = 25$ や 35 でもこの縞模様は観察されるが、自由水面に近づくにつれて縞模様は不明瞭となる。自由水面領域ではbursting現象が弱くなるために高速・低速縞がやがては消滅することを示しているのか、あるいはboiling現象と何らかの関係があり、外部パラメータに支配されるようになるためか目下不明である。

いずれにせよ、壁面近くのbursting現象が顕著な領域では高速・低速縞の出現は明白である。このとき、水路幅あたり低速縞の出現個数はFig. 5・44から平均して約15個であり、 $\lambda_3^+ \approx B_*/15 = R_*/3 = 100$ となって、やはり式(5・24)を満足している。一方、著者ら(1977)の観測によれば、自由水面に近づくにつれて低速縞の出現個数は減少し、 λ_3^+ は平衡領域以上で増大するようである。³⁰⁾ ejection運動の一部は自由水面まで達することがあろうという先述のGrassの指摘が事実ならば、²⁰⁾ 低速縞間隔 λ_3 が増大することは当然であり、これがboiling現象と結びつく可能性は十分にあらう。実際に木下(1976)は、実河川の航空写真からboiling現象を観測し、自由水面上には流下方向に伸びた高速・低速域の縦縞が存在することを見出し、この縦縞の間隔 λ_s は水深の約2倍、すなわち $\lambda_s/h \approx 2$ であると報告した。⁴⁹⁾ この木下の報告が妥当ならば、本実験では $B/\lambda_s \approx 2.5$ すなわちboiling現象の縦縞が2～3個観測されるはずであり、自由水面近くの λ_3 が λ_s にほかならないと推測できる。ともかく、bursting現象とboiling現象とが何らかの関連をもつ可能性は強い。 λ_3 が内部パラメータで、 λ_s が外部パラメータでそれぞれ支配されることを考慮すれば、これら両現象の物理機構を明らかにすることは結局乱れの二面構造化を解明することに帰着されるから、この方面の研究が一段と重要であると考えられる。

第5・7節 結 言

本章は、開水路せん断乱流の本質ともいえる乱れ発生機構を実験的に解明しようと試みたものである。乱れ発生機構の解明は瞬間Reynolds応力の構造を明らかにすることと同等であると考えられるから、本章の前半部では第2章で展開されたReynolds応力の条件付確率分布理論に従ってejection, sweep及びinteractionの各事象がこの応力の発生に果たす寄与率や占有時間率等を主として考察したが、得られた主な知見を列挙すれば次のとおりである。

(1) 壁面領域から平衡領域にかけての瞬間Reynolds応力の内部構造はほぼ相似であり、hole事象のレベル H が5になるとinteraction事象がほぼ消滅し、 H が約10になるとsweep事象が消滅して、これ以上のレベルではejection事象のみがReynolds応力の発生に寄与する。

(2) $H \approx 1$ でhole事象の占有時間率はほぼ50%にも達するが、Reynolds応力への寄与は2～3%であることから、ejection及びsweep事象は強いintermittencyをもつ。

(3) このような瞬間Reynolds応力の内部構造は3次オーダのGram-Charlier分布から誘導された条件付確率分布理論からでも十分な精度で予測することが可能である。しかし、自由水面領域での内部構造の予測にはさらに高次のGram-Charlier分布を考慮する必要がある。

(4) $H = 0$ でejection及びsweep事象がReynolds応力へ果たす寄与率 RS_2 及び RS_4 は、buffer層から平衡領域まではほぼ一定の $RS_2 \approx 0.77$ 、 $RS_4 \approx 0.57$ となるが、粘性底層内では $RS_2 < RS_4$ となり、また自由水面領域では共に増大して各事象の寄与は等方化に向う。このような各事象の内部構造は R_* や F_* の影響をほとんど受けないが、壁面粗度の影響は顕著に現われて、sweep事象がejection事象と同程度かより大きくなる傾向が見られる。

(5) 上述した各事象の内部構造の特性は、先述の理論によって十分に裏付けることができ、また第4章での乱れエネルギーの収支関係からも合理的に推測できる。この結果、乱れの発生機構は乱れ拡散率を介して乱れエネルギーの収支と密接な関係があることが明らかとなった。

以上得られた瞬間Reynolds応力の内部構造に関する知見に基づいて、本章の後半部ではbursting現象の周期特性を点計測の条件付サンプリング手法や可視化観測によって明らかにしようと試みたものであり、得られた主な結果を列挙すれば次のようである。

(6) ejection及びsweep事象からinteraction事象を取り除いたものがそれぞれejection及びsweep運動に相当することを見出し、それらの周期特性が評価された。その結果、ejectionとsweepの平均周期は共に可視化法から得られたbursting周期にほぼ等しく、外部パラメータに支配される。

(7) ejection及びsweep周期の生起分布は共に対数正規分布に良好に従うから、bursting現象と同一視できる coherentな運動の主流方向(x 方向)の拡がりスケール λ_1 は対数正規性をもつ。同様に、横断方向(z 方向)の拡がりスケール λ_3 も対数正規性をもつ。

(8) $\overline{\lambda}_1$ は外部パラメータ、 $\overline{\lambda}_3$ は内部パラメータにそれぞれ支配されることから、bursting現象は両パラメータに同時に依存するという二面構造性の存在が示唆される。

(9) bursting現象の可視化観測から、ejection及びsweep運動の存在が確認され、また高速・低速縞の挙動が把握された。そして、ejection運動の一部は自由水面まで達してboiling現象とかかわり合いをもつ可能性が示唆された。

このように乱れ発生機構すなわちbursting現象に関する多くの知見が得られたが、さらに解明すべき点も多い。この中で乱れの二面構造性に関する研究は最も重要でかつ興味あるものと考えられる。渦の発生・崩壊の本質はintermittentであり、攪乱渦の崩壊機構とbursting現象とを同一視しうるのはないかと考えられ、乱れのself-consistencyと同様な概念であるself-similarityをこの渦崩壊機構に適用すれば、bursting現象の対数正規性が説明できることから、この二面構造性を攪乱渦の崩壊機構と関連づけて究明することは有益であろう。層流から乱流への遷移機構の解明にKlebanoffら(1962)のリボン振動技術が多量の寄与を果たしたことを参考に²⁰⁾ 上述の研究に当たっても、よく制御された外部攪乱を与えてbursting現象の発達や崩壊などの応答挙動を検討できるような高度の技術を開発し、この二面構造性を明らかにすると共に、boiling現象との関連も究明する必要がある。

第5章 参考文献

- 1) Davies, P. O. A. L. & Yule, A. J.: Coherent structures in turbulence, *J. Fluid Mech.*, vol. 69, pp. 513-539, 1975.
- 2) Mollo-Christensen, E.: *Physics of turbulent flow*, AIAA J., vol. 9, pp. 1217-1228, 1971.
- 3) Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. & Runstadler, P. W.: The structure of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, vol. 30, pp. 741-773, 1967.
- 4) Willmarth, W. W. & Lu, S. S.: Structure of the Reynolds stress near the wall, *J. Fluid Mech.*, vol. 55, pp. 65-92, 1972.
- 5) Wallace, J. M., Eckelmann, H. & Brodkey, R. S.: The wall region in the turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, vol. 54, pp. 39-48, 1972.
- 6) Nychas, S. G., Hershey, H. C. & Brodkey, R. S.: A visual study of turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, vol. 61, pp. 513-540, 1973.
- 7) Offen, G. R. & Kline, S. J.: Combined dye-streak and hydrogen-bubble visual observation of a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol. 62, pp. 223-239, 1974.
- 8) Lu, S. S. & Willmarth, W. W.: Measurements of the structure of the Reynolds stress in a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol. 60, pp. 481-511, 1973.
- 9) Brodkey, R. S., Wallace, J. M. & Eckelmann, H.: Some properties of truncated turbulence signals in bounded shear flows, *J. Fluid Mech.*, vol. 63, pp. 209-224, 1974.
- 10) 中川博次, 祢津家久, 為沢長雄: 水素気泡トレーサによる乱れ計測について, 土木学会関西支部年講, Ⅱ-8, 1974.
- 11) 中川博次, 祢津家久: 開水路粗・滑面乱流のレイノルズ応力の構造について, 土木学会年講, Ⅱ-194, 1975.
- 12) Nakagawa, H. & Nezu, I.: Prediction of the contributions to the Reynolds stress from the bursting events in open-channel flows, *J. Fluid Mech.*, vol. 80, pp. 99-128, 1977.
- 13) Frenkiel, F. N. & Klebanoff, P. S.: Probability distributions and correlations in a turbulent boundary layer, *Phys. of Fluids*, vol. 16, pp. 726-737, 1973.
- 14) Bayazit, M.: Free surface flow in a channel of large relative roughness, *J. Hydraulic Research*, vol. 14, pp. 115-126, 1976.
- 15) Gupta, A. K. & Kaplan, R. E.: Statistical characteristics of Reynolds stress in a turbulent boundary layer, *Phys. of Fluids*, vol. 15, pp. 981-985, 1972.
- 16) Kreplin, H. P. (1973): 次から引用 Echelmann, H. *The structure of the viscous sublayer and the adjacent wall region in a turbulent channel flow*, *J. Fluid Mech.*, vol. 65, pp. 439-459, 1974.
- 17) Antonia, R. A. & Atkinson, J. D.: Higher-order moments of Reynolds shear stress fluctuations in a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol. 58, pp. 581-593, 1973.
- 18) Lawn, C. J.: The determination of the rate of dissipation in turbulent pipe flow, *J. Fluid Mech.*, vol. 48, pp. 477-505, 1971.
- 19) 中川博次, 祢津家久: 開水路乱流場のレイノルズ応力の挙動, 土木学会水理講演会論文集, pp. 121-126, 1976.
- 20) Corino, E. R. & Brodkey, R. S.: A visual investigation of the wall region in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, vol. 37, pp. 1-30, 1969.
- 21) Kim, H. T., Kline, S. J. & Reynolds, W. C.: The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol. 50, pp. 133-160, 1971.
- 22) Grass, A. J.: Structural features of turbulent flow

- over smooth and rough boundaries, *J. Fluid Mech.*, vol. 50, pp. 233–255, 1971.
- 23) 日野幹雄, 沢本正樹, 高須修二: 円管内振動流の乱流遷移に関する実験的研究, 土木学会論文報告集, 第237号, pp. 75–86, 1975.
 - 24) Zarić, Z.: Analyse statistique de la turbulence près d'une paroi par échantillonnage conditionnel, *Comptes Rendus*, t-269, Série-A, pp. 513–515, 1972.
 - 25) Echelmann, H.: The structure of the viscous sublayer and the adjacent wall region in a turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, vol. 65, pp. 439–459, 1974.
 - 26) 大路通雄(編): 乱流と情報, 乱流の情報解析研究会, 1976.
 - 27) Rao, K. N., Narasimha, R. & Narayanan, M. A. B.: The 'bursting' phenomenon in a turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, vol. 48, pp. 339–352, 1971.
 - 28) Lu, S. S. & Willmarth, W. W.: Measurement of the mean period between bursts, *Phys. of Fluids*, vol. 16, pp. 2012–2013, 1973.
 - 29) Laufer, J. & Narayanan, M. A. B.: Mean period of the turbulent production mechanism in a boundary layer, *Phys. of Fluids*, vol. 14, pp. 182–183, 1971.
 - 30) 中川博次, 篠津家久, 大楽勲: 可視化法による開水路乱れの観察, 土木学会関西支部年講, Ⅱ–32, 1977.
 - 31) Morrison, W. R. B., Bullock, K. J. & Kronauer, R. E.: Experimental evidence of waves in the sublayer, *J. Fluid Mech.*, vol. 47, pp. 639–656, 1971.
 - 32) Clauser, F. H.: The turbulent boundary layer, *Adv. Applied Mech.*, vol. 4, pp. 1–51, 1956.
 - 33) Antonia, R. A. & Luxton, R. E.: The response of a turbulent boundary layer to a step change in surface roughness, *J. Fluid Mech.*, vol. 48, pp. 721–761, 1971.
 - 34) Kovaszny, L. S. G., Kibens, V. & Blackwelder, R. F.: Large-scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol. 41, pp. 283–325, 1970.
 - 35) Hinze, J. O.: *Turbulence* (2nd edi.), McGraw-Hill, pp. 586–770, 1975.
 - 36) Schlichting, H.: *Boundary layer theory*, McGraw-Hill, pp. 24–43, 1968.
 - 37) Clark, J. A. & Markland, E.: Flow visualization in turbulent boundary layers, *Proc. of ASCE*, HY-10, pp. 1653–1664, 1971.
 - 38) Gupta, A. K., Laufer, J. & Kaplan, R. E.: Spatial structure in the viscous sublayer, *J. Fluid Mech.*, vol. 50, pp. 493–512, 1971.
 - 39) Bradshaw, P.: 'Inactive' motion and pressure fluctuations in turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, vol. 30, pp. 241–258, 1967.
 - 40) Batchelor, G. K.: *Homogeneous turbulence*, Camb. Univ. Press, 1953 (巽友正(訳), 乱流理論, 吉岡書店, 1960).
 - 41) Sandborn, V. A.: Measurements of intermittency of turbulent motion in a boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol. 6, pp. 221–240, 1959.
 - 42) Ueda, H. & Hinze, J. O.: Fine-structure turbulence in the wall region of a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, vol. 67, pp. 125–143, 1975.
 - 43) Mollo-Christensen, E.: Intermittency in large-scale turbulent flows, *Annu. Review of Fluid Mech.*, vol. 5, pp. 101–118, 1973.
 - 44) Monin, A. S. & Yaglom, A. M.: *Statistical fluid mechanics*, MIT Press, vol. 2, pp. 337–652, 1975.
 - 45) Gurvich, A. S. & Yaglom, A. M.: Breakdown of eddies and probability distribution for small-scale turbulence, *Phys. of Fluids*, vol. 10, pp. S59–S65, 1967.
 - 46) 余越正一郎: 河川乱流に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1970.
 - 47) 中川, 篠津, 大楽, 南: 可視化法による乱れの発生機構に関する実験的研究, 土木学会関西支部年講, Ⅱ–31, 1976.
 - 48) Einstein, H. A. & Li, H.: The viscous sublayer along a smooth boundary, *Proc. of ASCE*, EM-2, pp. 1–27, 1956.
 - 49) 木下良作: 洪水流にみられるラセン流とその表面流速分布の測定, 第4回流れの可視化シンポジウム, pp. 57–60, 1976.
 - 50) Klebanoff, P. S., Tidstrom, K. D. & Sargent, L. M.: The three-dimensional nature of boundary-layer instability, *J. Fluid Mech.*, vol. 12, pp. 1–34, 1962.

第6章 せん断乱流の物理モデルに関する研究

第6・1節 緒言

すでに論じたように、開水路流を含めた壁面乱れは非線形性の、ランダムな3次元変動流であるから、この支配方程式であるNavier-Stokesの式を直接解くことはまったく不可能であり、現在に至るまでその検討は主に実験的研究に委ねられてきた。これらの研究を通して実験データが蓄積され、また新しい実験の事実が見い出されるとともに、現象を普遍的に説明し得る数学あるいは物理モデルを考案しようとする試みは、その物理的意味を明確にし、またその体系化と応用的発展を図る上で不可欠なことと考える。しかしながら、完全な乱流モデル(数値モデル)がNavier-Stokesの直接解である限り、乱れ現象の本質を害わない程度に大胆な仮定をしたり、微細な特性を無視したりしてモデル化することは避けられず、その結果、若干の不十分な点が含まれていたとしても、現象の普遍的な特性を説明できれば当面満足せざるを得ないであろう。そして、予測された諸特性の実験的検討の積み重ねや新たな実験的知見に基づいてより適切な乱流モデルを展開する努力が必要である。

本章は、前章までの実験的研究の成果を踏えて、これらの特性を説明し得る定量的な乱流モデルを提案しようとするものである。

6・1・1 従来の乱流モデルの概観

1950年代中頃までにNACAグループによる風洞実験の成果が蓄積された。これらの実験結果を説明する目的で、Townsend(1956)は、従来彼自身が行った格子乱流や後流乱れの詳細な実験から生み出した「大きな渦運動に関する理論」を壁面乱れに適用して、渦の回転軸が主流方向を向きその渦管が壁面と接した、いわゆる“attached eddy”モデルを提案した¹⁾。また、Grant(1958)もTownsendの概念を踏襲して同様な渦モデルを考案した²⁾。彼らの渦モデルは主に乱れの空間相関を説明しようとしたものであり、実験値とかなりよく一致する面もあるが、十分なものではなかった。

一方、Townsendと同時代に、Einsteinら(1956)³⁾とHanratty(1956)⁴⁾とは別個に粘性底層のモデル化を行った^{*)}。特に、Einsteinらは染料によって粘性底層内の渦攪乱に関する周期的な発生・崩壊機構を可視化観測し、これを

Navier-Stokesの式の大膽な線形近似によってある程度説明することに成功した。前章で論じたような乱れのbursting現象が明確に発見されていなかった当時としては、これらの乱流モデルは斬新なものであり、極めて注目に値する。

次に、1960年代中頃までは新たな実験的知見の集積やそのモデル化への模索の時期とみなすことができる。すなわち、熱線流速計の改良が進み、また新たに熱膜流速計や水素気泡法等が開発されつつあった時期に当たり、壁面圧力の変動解析や乱流場の時空間相関解析等の多くのデータが蓄積された。これらの実験を通して壁面近傍には壁面から離れる向きに間欠的に起こる噴流状の流れ、今日というejection運動の存在が指摘され、丁度層流-乱流の遷移機構をモデル化した“hair-pin eddy”⁶⁾の概念に基づいて説明できるのではないかと論議され出した。これらの示唆は1966年9月に京都で開催された“Boundary Layer and Turbulence”に関する国際シンポジウム(1967年のPhys. of Fluidsに掲載)で与えられた。例えば、Willmarthらは壁面圧力 p_0 と速度変動 w との時空間相関を詳細に計測して、壁面から離れる上向き流れをFig. 6・1で示されるU型渦で説明しようとした⁷⁾。この渦モデルは流下方向(x_1 方向)に対して角度 θ だけ傾斜したU型の渦管によって構成され、隣接し合う渦管は互いに反回転の対になっている。これは現在考えられている渦モデル(以後、馬蹄型渦と総称する)の原型であり、注目される。そして、同じシンポジウムで発表されたFavreら⁸⁾やStenberg⁹⁾による速度変動の時空間相関に関する詳細な実験データを定性的に良好に説明し得た。

1960年代後半から現在までの約10年間は馬蹄型渦モデルの開発から改良に至る発展期であると考えられる。

まず、1967年にKlineらのグループは水素気泡法によってbursting現象を見事にとらえ(第2・5・1節を参照)、Fig. 6・2に示すような定性的な渦モデルを考えてこれを説明しようとした¹⁰⁾。すなわち、 z 方向にまず回転していた低速渦が揚力によって浮上させられ、渦管は引っ張られながら(vortex-stretching)ある傾斜をもって移流され、遂にはその引張限界で崩壊され(break-up)乱れが生成されるものと考えた。初期の低速渦の形状は別として、その発達から崩壊に至る渦形状はWillmarthらのものと同様な馬蹄型であり、彼らの渦モデルを一步前進させたものといえる。

翌1968年にはBlackはKlineらの馬蹄型渦モデルをさらに発展させ、きわめて注目すべき現象論的なモデルを発

*) Hinze(1975)⁵⁾は彼らのモデルを粘性底層の“renewal”あるいは“discontinuous-film”modelと呼んでいる。後述するように、ここではrenewal modelと呼ぶことにする。

表した¹¹⁾。まず乱流運動を、周期的な攪乱を受けて運動する主運動 ("primary" motion) と小スケールのランダムな乱れ運動をする副次運動 ("secondary" motion) とに区分し、bursting現象には前者のみが関与して乱れを発生させると考えた。主運動を Fig. 6・3 に示した馬蹄型渦でモデル化^{*)}し、この渦の移流速度 \bar{U}_i で移動する座標上で考察を進めている。頂部の z 軸に平行な渦管のみが渦面内に速度を誘導せしめると仮定し、渦面内を通過する主運動速度とこの誘導速度との差異をなくすように働く作用がせん断応力そのものであるとした。例えば、Fig. 6・3 の (a) は減速作用、(b) は加速作用を模式化したものである。そして、周期的に起こるこの応力とその解除 ("stress-relieved") 機構が bursting 現象であろうと考え、Fig. 6・4 のような概念図を提案した。実際の定式化は前述の Einstein らや Hanratty のものと同じであるが、その初期条件は若干異なっている。

以上のように、Black のモデルには大胆な仮定や議論の飛躍があり、また物理的に疑問が持たれる面も多いが、近年の bursting 現象に関する知見をふんだんに取り入れたことが特に注目に値する。

1970 年に余越はこのような馬蹄型渦を河川乱流の構造を説明するのに適用した (彼は「型渦と呼んだ」)¹²⁾ Fig. 6・5 に示すようにその渦モデルは Kline らのものと同様であって、 \square 型渦の先端が自由水面に達したとき boiling 現象が観察されるであろうと論じた。余越のモデルが bursting 現象を考慮に入れたものであるかどうかは不明であるが、河床で発生した \square 型渦を自由水面の boiling 現象と直接結びつけるには、まず第 5 章で指摘した乱れの二面構造性を解明せねばならないであろう。

1974 年には著者らによって後述する π -型渦モデルが提案され、その定式化が図られた。¹³⁾

また、1975 年に Hinze は、従来の bursting 現象に関する知見や層流-乱流の遷移機構との類似点を踏えて Ω -型渦モデルを提案した。⁵⁾ この渦はやはり馬蹄型であるが、壁面から離れるに従って x_2 方向の渦度 ω_2 によって頂部が若干くびれると考え、これを強調する意味で Ω -型と名づけられた。そして、Fig. 6・6 で示すように、この渦モデルを用いて一連の bursting を説明しようと試みた。

Hinze のモデルは概ねこれまでのモデルと類似であり、ここ 10 年来の渦モデル化への努力の総決算とでもいうべきものである。すなわち、 z 方向 (x_3 方向) の渦がまず発生し、これが発達しながら \square 型渦、さらには Ω 型渦へと成長し、遂には激しい ejection 運動とその直後に起こる sweep 運動とによって乱れが生成されて一つの bursting 過程が完結するというものである。勿論、これは理想化されたモデル

であるが、Fig. 2・20 で示された一連の bursting 現象を説明できそうであり、またその速度変動の形も現実に近いものと考えられる。次節以下ではこのモデルに立脚した定式化を試みる。

6・1・2 乱流モデルの基本構成

すでに第 2、4 及び 5 章においてスペクトル手法や条件付確率分布手法によって種々の乱流のモデル化を試み、主として乱流場のある固定点での乱れ特性を乱れの self-consistency に立脚して論じて来た。ここでは、前節で概観したように現在ほぼ確立されつつある馬蹄型渦モデル (Fig. 6・6) に立脚して、壁面乱れの最も注目すべき特性である bursting 現象を巨視的ではあるが定量的に説明するモデルを開発し、せん断流の乱流構造をより現象論的に理解できるよう努める。

まず、壁面領域は bursting 現象が最も顕著であり、乱れエネルギーの発生領域に相当していた。Fig. 6・6 のように、馬蹄型渦は移流速度 \bar{U}_i で流されながら発達し、引張限界に達してその大半は壁面領域内で崩壊し、混沌とした流れ、すなわち乱れ (Reynolds 応力) を発生させることが前章までの研究で明らかにされた。すなわち、Clark ら (1971) の可視化観測で示されているように、¹⁴⁾ この領域の渦は周囲の平均流場からエネルギーを吸収し、その渦径及び渦回転が共に増大して行く発達段階にあり、しかも大きな速度変動勾配 (強いせん断応力) を受けるから、この乱流場は極度に非平衡状態であり、bursting 現象で代表される周期的な運動を示すものと考えてよい。換言すれば、壁面領域の乱流モデル化には周期的特性をもつ非平衡状態 (時間依存性) を考慮に入れる必要があり、ここでは Einstein らのモデルを拡張していわゆる「更新」モデル ("renewal" model) を提案する。

次に、平衡領域以上の主流域は $\delta = y/h$ で表示すべき所であり、この乱流場はほぼ平衡状態に達していると考えられる。すなわち、第 5・6 節で考察したように、一部の馬蹄形渦は壁面領域内で崩壊せずに平衡領域に達してほぼ定常運動をするものと考えられる。時間依存性や壁面粗度等の影響を無視してもよいから、乱流場としては比較的単純で均質に近く、例えば Helmholtz の渦度保存則等が近似的に成立するものと考えられ、この領域には馬蹄型渦を定式化した π -型渦モデルを適用する。この馬蹄型渦の自由水面への到達が boiling 現象であるとする議論もあるが、その裏付けに乏しい現在、この自由水面の影響を無視して考えることにする。

以上の乱流モデル化への基本的構成を説明したものが、Fig. 6・7 である。更新モデルと π -型渦モデルとは、それぞれ非平衡状態と平衡状態というまったく異なった考えから定式化したものであるが、最後の節ではこれらの接点を模索する目的で結合モデル ("combined" model) を提案する。

*) 後述するように π -eddy model を発表後 Black の文献を入手したが、両者の渦形状はきわめて類似していた。しかし、その基本的な考え方には相違が見られる。

なお、本研究では bursting 現象のモデル化にむしろ力点を置いているから以下では滑面乱流のみを対象とする。

第6・2節 π -型渦モデル (π -eddy model)

6・2・1 π -型渦の構成とその定式化

前節で述べたように、現在、壁面乱れの構造は馬蹄型渦によって定性的に説明できるものと認められているから、壁面領域から発達して来てほぼ平衡状態の主流域に達した渦もなお馬蹄型をなしているものと考えられる。しかし、馬蹄型渦、すなわち Γ 型渦やさらに複雑な Ω 型渦を正確に定式化することは現段階では極めて困難であり、ここでは定式化を目的として Fig. 6・8 に示すような簡単な π -型の渦 (π -eddy) によって近似化することにする¹³⁾ この渦の形は、壁面領域の bursting 現象をモデル化しようとした Black の渦形とはからずとも同じであり (Fig. 6・3 参照)、馬蹄形を最も単純化したものである。

さて、 π -型渦の移流速度を U_c とし、 U_c で動く座標上で考察を進める。このとき、Fig. 6・3 の Black と同様に、 π -型渦をほぼ固定して考えることができる。¹¹⁾ Fig. 6・8 に示すように π -型渦の脚部 \overline{AB} 及び \overline{CD} は y 軸に、頂部 \overline{BC} は z 軸にそれぞれ平行であって、渦面内 ($ABCD$ 平面) で対称な渦管を構成し、渦面は x 軸に対して θ だけ傾斜している。

馬蹄型渦の直径など細部に関する知見は現在でも得られていないが、壁面領域内の強いせん断応力によって歪まされて (vortex-stretching 作用) いることを考えれば、任意の渦管は x 方向へ歪んだ楕円形に近い形をとるであろう。したがって、任意の一つの π -型渦の断面は x 方向に長径 a 、 z 方向に短径 b なる楕円形をなし、Fig. 6・8 で示す向きに ω なる角速度で回転していると考えてよい。 π -型渦の端 A 及び D は薄い壁面領域にあり、また頂部 \overline{BC} はここから発達したものであるから、Fig. 6・6 の Hinze のモデル等を考慮すれば、 \overline{BC} は高速・低速渦の間隔 λ_3 と同程度であろう。すなわち、 $(\overline{BC})^+ \simeq \lambda_3^+ \simeq 100$ であり、ほぼ壁面領域の厚さに相当するから、 $\overline{AB} \gg \overline{BC}$ と考えてよく、ここでの乱流場は主として π -型渦の2つの脚部の渦回転 (楕円運動) によって支配されよう。¹⁵⁾ 当然、壁面領域内の馬蹄型渦を対象とするのであれば、 $\overline{AB} \lesssim \overline{BC}$ となるから頂部の渦管の寄与を無視することはできない。実際、前節で概観した Black のモデルでは脚部 \overline{AB} 及び \overline{CD} の寄与は無視され、頂部 \overline{BC} のみによって乱流場は支配されるとしており、 π -型渦モデルとは根本的に異なっている。

以上の考察から、任意の π -型渦の運動は次式の楕円運動で近似される。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \tilde{x}_0(t) - a \cos \omega t \cdot \sin \theta \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{y}_0(t) + a \cos \omega t \cdot \cos \theta \\ \tilde{z}(t) &= \tilde{z}_0(t) + b \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.1)$$

\sim 記号は移動座標系を示したものであり、後述するように $\tilde{U} \equiv U_c$ と近似できるから、時間微分 $\dot{\tilde{x}} = u$ 、 $\dot{\tilde{y}} = v$ 、 $\dot{\tilde{z}} = w$ (ここで、 \cdot 記号は d/dt を示す) は乱れ変動成分のみを表わす。

$(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0)$ は π -型渦脚部の楕円運動の軸上の代表点の座標であり、Fig. 6・7 で示したように主流域の渦は平衡状態に達し、ほぼ定常な楕円運動をしていると考えられるから、この代表点の速度 $u_0 \equiv (\dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0, \dot{\tilde{z}}_0)$ は小さいものと考えられる。しかし、壁面領域ほど大きくはないが、この主流域でも平均流速勾配は存在し、またそこでの渦は壁面領域での崩壊を免れて発達してきたものであって、弱い vortex-stretching 作用でも崩壊しやすい性質をもっている (前章で明らかにされたように、平衡領域でも壁面領域と同様な bursting 現象あるいは渦の崩壊現象が観察された)。したがって、 u_0 は楕円運動の速度に比べて十分小さいが、無条件に無視することはできない。この意味で、 π -型渦は、渦自身の持つ楕円運動を主運動、速度 u_0 で代表される渦全体の変形運動を副次運動とするモデルから構成されている。

さて、この副次運動はせん断応力 (平均流速勾配 $\partial U / \partial y$ と考えてよい) による vortex-stretching 作用に起因し、渦の脚部の長さ ℓ ($\equiv \overline{AB} \equiv \overline{CD}$) 及び傾斜角 θ を変化させるから、変形速度である u_0 を正確に定式化することは極めて困難であり、ここでは次のように近似化したモデルを考える。

まず、平均流速と渦の移流速度との差、すなわち $\hat{U} \equiv U - U_c$ が微小でも、速度勾配 $\partial \hat{U} / \partial y = \partial U / \partial y$ が存在すれば vortex-stretching 作用を受けて渦は何らかの副次運動を行う。¹⁶⁾ しかし、任意の π -型渦は第一次的には平衡状態にあることを考慮すれば、vortex-stretching による変形はその平衡位置からの振動で与えられ、瞬時に移流されて消滅することはない。すなわち、 U_c の移動座標から見た渦全体の移動は無視しうるものと考えられる。

このとき、Fig. 6・9 に示すように速度勾配による vortex-stretching は主として π -型渦の頂部 \overline{BC} に作用して、その平衡位置 $ABCD$ の渦面から $AB'C'D$ の渦面へと振動したとする (したがって、 $\dot{\tilde{z}}_0 \equiv 0$ とおける)。頂部 \overline{BC} は相対速度 \hat{U} によって揚力 L と抗力 D とを受け、脚部 \overline{AB} 及び \overline{CD} にはこれらに抗すべき何らかの力 F が生じて平衡状態にあるが、この位置から振動するとさらに慣性力が加わる。

いま、渦管 \overline{BC} を直径 R 、長さ ℓ_1 の円筒で代表し、各振動量を Δ 記号で表わせば次式が成立する (Fig. 6・9 参照)。

$$\left. \begin{aligned} -\rho \pi R^2 \ell_1 \Delta \ddot{x} - (\Delta F \cos \theta + F \sin \theta \cdot \Delta \theta) + \Delta D &= 0 \\ -\rho \pi R^2 \ell_1 \Delta \ddot{y} - (\Delta F \sin \theta - F \cos \theta \cdot \Delta \theta) + \Delta L &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.2)$$

抗力は $D = \rho C_d R \ell_1 \hat{U}^2$ 、揚力は $L = \rho C_f R^2 \ell_1 \omega \hat{U}$ で表わされるから (ここで、 C_d 及び C_f は係数)、これらの振動

力 ΔD 及び ΔL は振動量の一次項で容易に近似される。一方、脚部の抵抗力 F は応力の解除 (stress-relieved) が起こるまでの渦面全体における抵抗力と見なせるが、その実体は不明で π -型渦の平衡状態を強調するために便宜的に取り入れられた力とも考えられ、実験的検証が必要である。この力は渦面の伸縮に抗して生じる力であるから、渦の長さ ℓ と相関があり、ここではこの第一次項のみを取って簡単に $\Delta F = k \Delta \ell$ (k は比例定数) と仮定する。

S を渦の断面積 ($=\pi a b$) とすると、渦度及び質量の保存則は

$$S \omega \equiv \Gamma (\text{一定}), \quad \rho S \ell \equiv \text{一定} \quad (6.3)$$

であり、また、Fig. 6・9 から次の関係式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \Delta \ell \cos \theta - \ell \sin \theta \cdot \Delta \theta \\ \Delta y &= \Delta \ell \sin \theta + \ell \cos \theta \cdot \Delta \theta \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

以上のモデル化が許されれば、次の微分方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \ddot{\Delta \ell} \\ \ddot{\Delta \theta} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \ell \\ \Delta \theta \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

式 (6.5) の係数マトリックスの要素はかなり複雑である。¹³⁾ しかし、Favre⁸⁾ や Sternberg⁹⁾ の実験結果によれば相対速度 \hat{U} は概ね零と見なしてよく、また π -型渦の平衡状態を強調して $\hat{U} = 0$ と近似すれば、次のように簡単化される。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{k}{\rho \pi R^2 \ell_1} - \frac{C \ell}{\pi} \omega \sin^2 \theta \frac{dU}{dy} \\ B &= -\frac{C \ell}{\pi} \omega \ell \sin \theta \cos \theta \frac{dU}{dy} \\ C &= -\frac{C \ell}{\pi} \omega \sin \theta \cos \theta \frac{dU}{dy} \\ D &= -\frac{C \ell}{\pi} \omega \ell \cos^2 \theta \frac{dU}{dy} \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

式 (6.6) は任意の π -型渦の平衡位置での値であり、式 (6.5) を解けば、これからの振動運動を予測できる。しかし、後述するように平衡傾斜角 θ すら正確に評価できないことから、その振動角 $\Delta \theta$ を物理モデルに結びつけることは容易でなく、また vortex-stretching 作用による振動運動は渦面の伸縮の形をとるところから、以下ではさらに $\Delta \theta = 0$ と簡単化して取扱う。

このとき、副次運動の速度 $\mathbf{u}_0 \equiv (\dot{\Delta x}, \dot{\Delta y}, 0)$ は、式 (6.4) 及び (6.5) から容易に得られ、式 (6.1) から任意の π -型渦による速度変動成分は次のように定式化される。¹³⁾

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= a \omega \sin \omega t \sin \theta + A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \cos \theta \\ v(t) &= -a \omega \sin \omega t \cos \theta + A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta) \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

$$w(t) = b \omega \cos \omega t \quad (6.7)$$

ここで、

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho \pi R^2 \ell_1} - \frac{C \ell}{\pi} \cdot \omega \sin^2 \theta \frac{dU}{dy}} \quad (6.8)$$

また、 A_0 及び δ は積分定数であるが、振動運動を上記のように簡略化したのに伴う誤差を丸め込んでいる。

式 (6.7) が π -型渦モデルの基本式で、右辺第 1 項は主楕円運動を、第 2 項は副次運動を表わす。流速勾配 dU/dy が大きいほど、また π -型渦が伸びて ω が大きくなるほど副次運動の周波数 ω_0 は小さくなり、極端に大きな場合には平衡位置にとどまることなく瞬時に引き伸ばされて崩壊するものと考えられる。しかし、式 (6.8) には物理的に不明な定数を含み、また副次運動を平衡位置からの振動で大胆にモデル化したものであるから、 ω_0 の値を実際に評価することは現在困難である。

6・2・2 π -型渦による乱れ強度及び Reynolds 応力

任意の一つの π -型渦による速度変動への寄与は式 (6.7) で与えられ、主運動と副次運動とは直接的には無関係、すなわち $\omega \gg \omega_0$ と仮定すれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \overline{u^2} &= (a\omega)^2 \frac{\sin^2 \theta}{2} + (A_0 \omega_0)^2 \frac{\cos^2 \theta}{2} \\ \overline{v^2} &= (a\omega)^2 \frac{\cos^2 \theta}{2} + (A_0 \omega_0)^2 \frac{\sin^2 \theta}{2} \\ \overline{w^2} &= \frac{(b\omega)^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{uv} &= -\frac{1}{2} \{ (a\omega)^2 - (A_0 \omega_0)^2 \} \sin \theta \cos \theta \\ \overline{uw} &= 0 \\ \overline{vw} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

式 (6.10) から、 u と w 及び v と w との相関はそれぞれ零、すなわちこの方向の Reynolds 応力は存在しないことになり、これは 2 次元乱流場の特性と合致する。一方、渦の傾斜角 θ は $0 < \theta \leq \pi/2$ であり、Reynolds 応力 \overline{uv} は正でなければならないから、式 (6.10) より次の不等式が成立する。

$$(a\omega)^2 \geq (A_0 \omega_0)^2 \quad (6.11)$$

式 (6.11) は、副次運動の寄与 (パワー) が主運動より当然小さいことを示している。また、相関係数 R は、

$$R = \frac{(a^2 \omega^2 - A_0^2 \omega_0^2) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\{(a\omega)^2 \sin^2 \theta + (A_0 \omega_0)^2 \cos^2 \theta\} \{(a\omega)^2 \cos^2 \theta + (A_0 \omega_0)^2 \sin^2 \theta\}}}$$

..... (6.12)

であり、 $0 < R < 1$ となるから、実情と一致する。

次に、乱れ強度の式(6.9)から次式が得られる。

$$\overline{u^2} - \overline{v^2} = \frac{1}{2} \{ (a\omega)^2 - (A_0 \omega_0)^2 \} \{ \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \} \quad (6.13)$$

すべての π -型渦が寄与する実際の乱流場では $\overline{u^2} > \overline{v^2}$ となる実験的事実から、任意の構成渦でも $\overline{u^2} > \overline{v^2}$ であることが必要である。すなわち、式(6.11)と(6.13)とから

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad (6.14)$$

なる傾斜角をもった π -型渦によって実際の乱流場が矛盾なくモデル化されるものと考えられる。

6・2・3 スペクトル密度関数

これまでの議論は任意の一つの π -型渦による寄与であったが、実在の乱流場はすべてのスケールの渦によって構成されているから、第2章で展開されたと同様にスペクトル密度関数の概念を導入しなければならない。すなわち、渦のスケール \mathcal{L} によって渦運動の大きさがいかなる分布をなすかを知る必要がある。渦運動は主運動と副次運動とで構成されるものとしたが、平衡状態での後者の渦の寄与は周波数 ω が小さい場合の主運動で代表させうるものと仮定して以下考察する。

さて、この主運動の一部は平均流との相互作用によって乱れを発生させると考えられるが、壁面領域に比べて平衡領域での乱れの発生率は小さく、Fig. 2・9で示したように大きな渦の崩壊に伴う乱れエネルギーの輸送がむしろ卓越することから、その動的平衡状態にあることを考慮して、この主運動は主として乱れのカスケード過程にあるものと仮定する。すなわち、主運動を通して大きな渦から小さな渦へと乱れエネルギーが輸送されるが、このエネルギー輸送はあたかも小さな渦の主運動が大きな渦に対して粘性として働く結果生じる仕事であろうというHeisenbergの有効粘性の概念¹⁷⁾をここで適用する。

ある任意の π -型渦 ω の有効渦動粘性 ν_T は $\mathcal{L}^2 \omega$ であるから、その平均的なものとして $\nu_T = (a^2 + b^2) \cdot \omega / 2$ を採用する。主運動が有効粘性 ν_T に抗する力はOseen則を適用して $4\pi \nu_T v$ (ここで v は渦の代表速度)¹⁸⁾と近似すれば(Oseen則は円柱形に対して正確である)、 ν_T に抗してなされる仕事 W は $4\pi \nu_T v^2$ で与えられる。次に、渦の代表速度として $v^2 \equiv (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) / 3$ を採用し、結局次式が得られる。

$$W \sim 4\pi \cdot \frac{(a^2 + b^2) \omega}{2} \cdot \frac{(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})}{3} \quad (6.15)$$

Heisenbergの概念に従えば、この仕事 W が任意の渦を通してエネルギー輸送であり、この単位質量(単位体積)当りの輸送率 $W/(\pi a b \cdot 1)$ がFig. 2・9で示したように乱れ

エネルギーの逸散率 ε にほぼ等しいから、式(6.9)を使って次式が得られる。

$$\varepsilon \equiv \frac{K \cdot (1 + e^2)^2}{3e} a^2 \omega^3 \quad (6.16)$$

ここで、 $e \equiv b/a < 1$ であり、 K は以上の仮定に伴う不確かさを含む比例定数であって、1のオーダーの値である。

次に、 x 軸方向の一次元波数 k は、 π -型渦が θ だけ傾斜しているために $k = \pi \sin \theta / a$ で与えられ¹³⁾式(6.16)から次式が得られる。

$$\omega^2 = \frac{(3e/K)^{2/3}}{(1 + e^2)^{4/3}} (\pi \sin \theta)^{-4/3} e^{2/3} k^{4/3} \quad (6.17)$$

ところで、カスケード過程が存在する波数範囲($k_0 \leq k \leq k_\infty$)ではReynolds相似則が成立し、また平衡領域での乱流構造自体に相似性が成り立つから、 π -型渦の形状はどのスケールでも相似であると考えてよい(第5章で指摘したself-similarityと同じ概念)。すなわち、渦の扁平率 e は定数と見なしてよく、式(6.17)から ω に関する一次元波数スペクトル $G(k)$ が導びかれる($k_0 \leq k \leq k_\infty$)。

$$G(k) \equiv \frac{d\omega^2}{dk} = \frac{4}{3} \frac{(3e/K)^{2/3}}{(1 + e^2)^{4/3}} (\pi \sin \theta)^{-4/3} e^{2/3} k^{1/3} \quad (6.18)$$

$G(k)$ は波数 k の $1/3$ 乗に比例し、これは井上(1952)による乱子モデルの結果¹⁹⁾とも一致している。

次に、 $\omega \gg \omega_0$ としてカスケード過程での副次運動は主運動に形式上含められたから、式(6.9)より乱れ強度に関する一次元波数スペクトル $E_u(k)$ 、 $E_v(k)$ 及び $E_w(k)$ が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \overline{u^2}(k) &= \frac{\sin^2 \theta}{2} \left(\frac{\pi}{k} \sin \theta \right)^2 G(k) \equiv E_u(k) \\ \overline{v^2}(k) &= \frac{\cos^2 \theta}{2} \left(\frac{\pi}{k} \sin \theta \right)^2 G(k) \equiv E_v(k) \\ \overline{w^2}(k) &= \frac{e^2}{2} \left(\frac{\pi}{k} \sin \theta \right)^2 G(k) \equiv E_w(k) \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

すなわち、各成分のスペクトル関数は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E_u(k) &= \frac{2}{3} \frac{(3\pi e/K)^{2/3}}{(1 + e^2)^{4/3}} (\sin \theta)^{8/3} e^{2/3} k^{-5/3} \\ E_v(k) &= \frac{2}{3} \frac{(3\pi e/K)^{2/3}}{(1 + e^2)^{4/3}} (\sin \theta)^{2/3} (\cos \theta)^2 e^{2/3} k^{-5/3} \\ E_w(k) &= \frac{2}{3} \frac{e^2 (3\pi e/K)^{2/3}}{(1 + e^2)^{4/3}} (\sin \theta)^{2/3} e^{2/3} k^{-5/3} \end{aligned} \right\}$$

..... (6・20)

各成分のスペクトル関数は波数 k の^{-5/3} 乗に比例することがわかり、これはKolmogoroffの局所等方性理論からの結果と一致し、 π -型渦モデルに関するこれまでの議論の妥当性を示すものである。

最後に、 $k_0 \equiv b^{-1} > a^{-1}$ とおけば $k \equiv a^{-1} < k_0$ では平衡領域といえども副次運動は無視できず、 π -型渦はvortex-stretching作用のために崩壊寸前と考えられるから、渦断面は極端に歪んでいるだろう。このとき、 $\epsilon^2 \ll 1$ と近似すれば、式(6・3)の渦度保存則と式(6・16)とから $\epsilon \sim \epsilon^{-1} \alpha^2 \omega^3 \sim \epsilon^{-2} \omega^2 \Gamma$ となり、式(6・9)から次式が得られる。

$$E_u(k) \sim (\epsilon \Gamma^{-1} k_0^{-2}) k^{-1}, \quad E_v(k) \sim (\epsilon \Gamma^{-1} k_0^{-2}) k^{-1}$$

$$E_w(k) \sim (\epsilon \Gamma^{-1} k_0^{-4}) k \quad \text{..... (6・21)}$$

発生小領域の u 変動スペクトルは波数 k の⁻¹ 乗に比例し、Tchenの理論結果²⁰⁾や第4章での実験結果と一致するが、 v や w 変動スペクトルは実験事実と相異している。これは、渦の副次運動のモデル化が単純すぎたためであり、さらに改良を要するが、平衡領域の乱れをほとんど支配する主運動を対象とする限り、この相違は当面無視してよいであろう。

6・2・4 乱れ強度分布

式(6・20)から乱れ強度 u' , v' 及び w' を求めるには π -型渦の扁平率 ϵ 及び渦面の傾斜角 θ を知らねばならない。

まず、渦形状の相似性から ϵ は定数と考えられ、 x 方向及び z 方向の平均渦径 L_x 及び L_z で代表されよう。すなわち、 $\epsilon \equiv 1$ なる完全に等方性の乱流では $L_z/L_x = 0.5$ であるから、せん断乱流では $\epsilon \equiv 2 (L_z/L_x)$ で近似できるものと考えられる。

ところで、 L_z の測定値は L_x に比べて乏しく、それほど確かな知見は得られていない。Laufer (1951) の実験によれば主流域で $z \equiv y/h$ にはほぼ無関係に L_z/L_x は約 0.3 程度であり、また今本ら (1974)²¹⁾ の実験では主流域の L_z/L_x は約 0.2 程度である。先の著者らの論文 (1974) では Laufer の実験値を使ったから、ここでもこれを採用し、 $\epsilon = 0.6$ と評価する。^{*}

次に、傾斜角 θ の評価はさらに困難である。乱流場を複雑な渦の集合体と見なし、その任意の渦を π -型渦でモデル化したのであるから、たとえこのような渦を可視化観測したとしても θ の正確な値を評価することは困難であろう。しかし、6・1・1 で概観したように馬蹄型渦が傾斜していること ($0 < \theta < \pi/2$) は明らかであり、同一な渦面内に

ある速度変動の相関は最も大きい (coherentな運動をしていると考えてよい) ことから、その最大相関方向が θ であると考えてこの概略値を評価できる。⁹⁾ Fig. 6・10は、Sternberg (1967)⁹⁾ がまとめた最大相関方向、すなわち渦の傾斜角 θ に関する結果である。この図によれば、 θ は粘性底層端での約 20 度から急増し、壁面領域端 ($y = 15 \text{ mm}$ にほぼ相当する) で約 40 度に達して平衡領域内ではほぼ 45 度以上となり、 π -型渦モデルで予測された式(6・14)の妥当性が認められる。しかし、 π -型渦がもち得る最大傾斜角 θ_{\max} に関しては明らかでなく、余越がいうように、馬蹄型渦の一部が自由水面まで伸びて boiling 現象になるのであれば、¹³⁾ θ_{\max} は 90 度近くまで達しよう。

以上の傾斜角 θ は平均渦 (大きな渦) に関して評価された概略値であり、渦のスケールや渦の発達程度によっても複雑に異なることから、 $\pi/4 \leq \theta \leq \theta_{\max}$ を満足する範囲の渦が一樣に分布している、すなわち、式(6・20)を $\pi/4 \leq \theta \leq \theta_{\max}$ で平均化した結果が実際に観測される一次元スペクトル分布であると仮定する。

例えば、理論上の上限である $\theta_{\max} = \pi/2$ のときは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E_u(k) &= 2.295 K' \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \\ E_v(k) &= 0.476 K' \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \\ E_w(k) &= 2.774 \epsilon^2 K' \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \end{aligned} \right\} \text{..... (6・22)}$$

ここで、 $K' \equiv \left[\frac{\epsilon}{K(1+\epsilon^2)^2} \right]^{2/3}$ である。

いま、 $C \equiv 2.295 K'$ とおけば、第2章で論じたように C は普遍定数で、ほぼ 0.5 と見なしてよい (Fig. 2・10 参照) から、 $\epsilon = 0.6$ を用いて $K = 3.19$ となる。

次に、乱れ強度 u' , v' 及び w' は式(6・22)から近似的に評価され、例えば、

$$u'^2 \approx \int_{k_0}^{\infty} E_u(k) dk = \frac{3}{2} C \epsilon^{2/3} (k_0^{-2/3} - k_{\infty}^{-2/3})$$

..... (6・23)

と計算できるから、 $\epsilon = 0.6$ を用いて次の関係式が得られる。

$$\frac{v'}{u'} = 0.46, \quad \frac{w'}{u'} = 0.66 \quad \text{..... (6・24)}$$

さて、 θ_{\max} を変数にとり、以上の計算を行った結果が Fig. 6・11 に示される。 θ_{\max} がほぼ 60 度以上であれば壁面乱れの特徴である $v' < w' < u'$ を満足するが、以下に実験値との比較によって θ_{\max} を検討する。Fig. 6・12 は、第4章で考察した高速流及び低速流グループの乱れ強度に

^{*} 相似性から ϵ はほぼ定数と見なされたが、小さな渦ほど等方性指向が大きいため ϵ 自体も漸次増加するであろう。したがって今本らの L_z/L_x の値より Laufer の値を採用した方がより妥当といえる。

関する実験結果を示したものである。Fig. 6・11で $\theta_{\max} = 78^\circ$ とするとき、

$$\frac{u'}{u_*'} = 0.55, \quad \frac{w'}{u_*'} = 0.69 \quad (6.25)$$

となり、Fig. 6・12の結果、すなわち式(4.12)と極めてよく一致することがわかる。また、式(6.16)中の k の値は 2.73 となり、1 オーダの値であるから、これまでの議論展開に矛盾点はないものと考えられる。

高速流グループの壁面領域は薄く、Fig. 6・12に図示された実験値はほとんど平衡領域以上に属するから、式(6.25)で与えられる π -型渦モデルによって乱流場は良好に説明されるようである。一方、低速流グループでは、 $\varepsilon \lesssim 0.1$ の壁面領域での実験値は式(6.25)を満足せず、この領域には π -型渦モデルが適用されないことがわかる。また、自由水面付近での実験値も式(6.25)との差異を示し、 π -型渦モデルに自由水面の影響を何らかの形で導入せねばならないことが示唆される。このためには馬蹄型渦(π -型渦)と boiling 現象との関連性をまず明らかにすることが必要であろう。

次に、平衡領域での乱れエネルギーの逸散率 ε と発生率 P との関係、すなわち $\varepsilon = P$ を使って式(6.23)から乱れ強度分布 u'/U_* に関する $1/3$ 乗則、すなわち式(2.81)を導くことができる。また、副次運動の結果である式(6.21)を包んだ式(6.20)の拡張式として Karman の内挿式を適用すれば、水深 h 、平均渦径 L_x 及びカスケード領域の下限波数 k_0 に関するスケール関係を論じることができる。しかし、これらの考察は文献(13)で詳細に行われており、また第2・2節及び2・3節での議論と重複する面が多いので、ここでは割愛する。

以上のように、 π -型渦モデルは自由水面近くを除いた乱流の主流域に良好に適用されて、そのマクロな構造を説明しうることが明らかになった。この領域は壁面粗度や自由水面等の影響、すなわち外的な境界条件をほとんど受けず、動的平衡性や相似性、換言すれば、乱れの self-consistency が成立するから、第4・3節で論じたように乱れ強度は次の指数分布で与えられる。すなわち、

$$\begin{aligned} u'/U_* &= D_1 \cdot e^{-\xi}, \quad v'/U_* = D_2 \cdot e^{-\xi}, \\ w'/U_* &= D_3 \cdot e^{-\xi} \end{aligned} \quad (6.26)$$

これらの式は π -型渦モデルからの一つの帰結と考えてよい。そして、この領域の π -型渦は主流方向(x 方向)に約 60% 歪められた渦断面をもち、約 80 度まで発達した渦傾斜角を一様に保持しているものと考えられる。

第6・3節 更新モデル (renewal model)

6・3・1 Einstein・Li の乱流モデルと その解釈

壁面領域での乱流モデルでは、Fig. 6・6で示される「周期的」な bursting 現象を表わすことが最大の課題であるが、その取扱いは前節の平衡領域の渦モデルよりはるかに困難となる。したがって、その本質を失うことなく乱流場を簡単な形に理想化して、巨視的といえどもこれらの乱流特性を説明しうるモデルを考案しなければならない。

まず、Einstein ら(1956)は粘性底層の可視化観察に基づいて、次のような単純化を行った。³⁾

1) Re が大きいとき粘性底層は壁面のごく近傍に限られ、主流の外的な境界条件を導入しなくてよい。

2) 粘性底層の発達期では分子粘性が支配的であるが、その崩壊期では渦動粘性が支配的となり、また前者よりはるかに短時間におこるから流速分布は y^+ の位置に無関係に一定となる。

3) 粘性底層の発達・崩壊は z 方向にはよらずに x - y 平面内でおこり、しかも x 方向領域が y 方向領域よりずっと大きく、したがって一次元不定流問題に帰着できる。

Fig. 6・6から判断して、粘性底層の発達・崩壊は bursting 現象に伴って現われる、あるいは巨視的にはこれらを同一視してよいから、上記の Einstein らの単純化を新しい角度から解釈すれば次のようになる。

bursting 周期は外部パラメータで支配されるが、それ以外の壁面領域の乱流特性は内部パラメータで普遍表示されるから、開水路流や境界層流といった主流の境界条件には依存せず、1) の単純化は妥当なことが認められる。

次に、前章までの実験結果や Fig. 2・20 及び 6・6 を参照すれば、coherent な馬蹄型渦の崩壊は ejection 運動に相当し、この渦の崩壊を均して新たな周期的過程に移そうとするのが文字通り sweep 運動であり、また渦の発達期間が interaction 運動に相当するものと考えられる。Reynolds 応力すなわち渦動粘性の大部分は ejection と sweep 運動によって発生するから、渦の発達期間における渦動粘性の作用を無視することは許されよう。したがって、ejection から sweep に至る運動では運動量交換が最も激しいから、歪んだ流速分布を一様化させる、すなわち応力の解除を行って加速流が生じる。流速が一様化されるとはいても、壁面が存在する以上速度勾配をもつが(Fig. 5・40参照)、運動量交換が十分に大きな理想的な流れでは壁面領域端の主流速度 U_0 が壁面まで伸びて一様流になるであろう。すなわち、この加速流を $\tilde{u} \equiv U_0$ (一定) の一様流で大雑把に近似したものが 2) の単純化と考えられる。なお、bursting 現象を interaction-ejection-sweep-interaction という完全な周期運動と見なすのはあくまでもそれを理想化し

た表現であり、また以下では便宜上 sweep運動が起きた時刻を $t=0$ とする。

最後に、Fig. 6・6に示す coherentな渦運動のスケール λ_1, λ_2 及び λ_3 に関しては、式(5・23)より λ_1^+ は $3R_*$ 程度、 λ_2^+ は最大限 100 以下であるがこの運動が顕著なのは 50 以下であり、 λ_3^+ は 100 程度であるから、 R_* が大きければ、 $\lambda_2^+ < \lambda_3^+ \ll \lambda_1^+$ となって 3) の単純化は許されよう。すなわち、境界層の近似理論から瞬間流速 $\tilde{u} \equiv (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ に関しては $|\tilde{u}| \gg |\tilde{v}| = |\tilde{w}|$ と考えてよい。

以上の考察から、Einsteinらの仮定は bursting現象の第1次近似としてかなり妥当なものであり、以下の数学モデルを導くことができる。

まず、Navier-Stokes の方程式は

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \underbrace{\left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right]}_{(a)} + \underbrace{\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right]}_{(b)} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \quad (6.27)$$

であるが、1) 及び 2) の仮定により渦の発達期(以下では添字 1 を付ける)は崩壊期(添字 2 を付ける)に比べて運動量交換が小さく、非線形なカップリング効果(a)項や周囲の影響である圧力変動効果(b)項が無視できて、次の近似式が成立する。*)

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial y^2} \quad (6.27)'$$

境界条件は

$$y=0 \text{ で } \tilde{u}_1=0, \quad y \rightarrow \infty \text{ で } \tilde{u}_1=U_0 \quad (6.28)$$

であり、初期条件は sweep運動の開始として

$$t=0 \text{ で } \tilde{u}_1=U_0 \quad (y>0) \quad (6.29)$$

式(6.27)'は容易に解けて次式を得る。

$$\tilde{u}_1 = \frac{2U_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-x^2} dx \equiv U_0 \operatorname{erf} \theta \quad (6.30)$$

ここで $\theta \equiv y/(2\sqrt{\nu t})$ であり、 $\operatorname{erf} \theta$ は誤差関数である。

式(6.30)が Einstein³⁾ や Hanratty⁴⁾ が得た解である。一方、Black は sweep運動の加速流を馬蹄型渦の主運動による誘導速度(対数則分布をする)と考え、初期条件として $\tilde{u}_1 = U_* (\kappa^{-1} \ln y^+ + 5.1)$ なる Coles の対数則を採用し、同様に式(6.27)'を解いて、式(6.30)より相当複雑な式を得ている。¹¹⁾ 先述のように、式(6.29)より Black が用

*) Black (1968) は、bursting 周期 T が比較的小さく、その現象がパルス的であることから $|\partial \tilde{u} / \partial t| \gg 1$ (a) 項としたが、¹¹⁾ この理由づけは上記とはほぼ同じである。

いた初期条件の方が実際現象により近いといえるが、この解は見通しの立ちにくい複雑な式であるから、以下に論じる bursting 現象のモデル化の原型として、上述の Einstein らや Hanratty の解である式(6.30)を採用する。

6・3・2 bursting 現象のモデルとその定式化

渦の発達期での瞬間流速分布 \tilde{u}_1 は式(6.30)で得られたが、bursting現象をモデル化するには \tilde{v}_1 成分さらに渦崩壊期の $(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$ が求められねばならず、以下のような単純化を図る。

まず、coherentな渦運動の移流速度 U_c で動く座標上では Fig. 6・6 は Fig. 6・4 のように見えて、式(4・37)と同様に $\partial/\partial t = -U_c \partial/\partial x$ と座標変換できるから、連続式を用いて式(6.30)から次式が得られる。

$$\tilde{v}_1 = - \int_0^y \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} dy = - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} \{1 - \exp(-\theta^2)\} \quad (6.31)$$

ここで、 $\alpha \equiv U_c/U_0 \leq 1$ であり、従来の種々の実験によれば $\alpha = 0.7 \sim 0.8$ である。⁵⁾

以上の式(6.30)及び(6.31)は渦の発達期間 T_1 における瞬間流速 $\tilde{u}_1 = (\tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$ をモデル化したものである。

次に、渦の崩壊期間 T_2 における瞬間流速 $\tilde{u}_2 = (\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$ の評価に関しては、この機構が十分明らかでない現在、次のように単純化して考える。まず、 $\beta \equiv T_2/T_1$ とおくと、ejection運動はパルスの短時間におこるから $\beta \ll 1$ と考えてよい。^{*)} すなわち、非常に短時間の内に応力が解除されて $\tilde{u}_1(t=T_1)$ は $\tilde{u}_1(t=0)$ へと復元する(この意味で「更新」モデルと名付け、更新期間すなわち bursting 周期は $T \equiv T_1 + T_2 = T_1(1 + \beta)$ である)から、 $\tilde{u}_2(T_1 \leq t \leq T)$ として $\tilde{u}_1(t=T_1)$ と $\tilde{u}_1(t=T) \equiv \tilde{u}_1(t=0)$ との平均で代表させてよい。次に、平均流速の y 方向成分は $\bar{v} = (T_1 \bar{v}_1 + T_2 \bar{v}_2)/T \equiv 0$ でなければならないから、 $\bar{v}_2 = -\bar{v}_1/\beta$ となる。 \bar{v}_2 は T_2 時間内での平均値であるが、短時間平均($\beta \ll 1$)であるから \bar{v}_2 自身と見なしてよい。すなわち、

$$\bar{v}_2 \equiv -\bar{v}_1/\beta \quad (6.32)$$

以上の単純化により、 $\beta \ll 1$ を考慮して次の乱流特性値が得られる。

$$U \equiv \bar{u} = \frac{1}{T} \left(\int_0^{T_1} \tilde{u}_1 dt + \int_{T_1}^T \tilde{u}_2 dt \right) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}_1 dt$$

$$V \equiv \bar{v} = 0 \quad (6.33)$$

*) Einstein らは β が非常に小さいと仮定して渦の崩壊による寄与を無視し、また Black のモデルはこの点が不明である。

$$\left. \begin{aligned} u'^2 &\equiv \overline{(\tilde{u}-U)^2} \doteq \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}_1^2 dt - U^2 \\ v'^2 &\equiv \overline{(\tilde{v}-V)^2} \doteq \frac{1}{(1+\beta)} \left\{ \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \tilde{v}_1^2 dt + \frac{1}{\beta} (\overline{\tilde{v}_1})^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

また、 $\overline{uv} = \{(\tilde{u}_1-U) \cdot \tilde{v}_1 + \beta(\tilde{u}_2-U) \cdot \tilde{v}_2\} / (1+\beta)$ であるが、第2項はejection運動で生じるReynolds応力への主要な寄与分であるから、正確に評価する必要がある。現象論的にいえば、ejection運動で生じるReynolds応力とはこの運動の直前・直後での \tilde{u} の速度変化量 $(\tilde{u}_1(t=T_1) - \tilde{u}_1(t=T)) < 0$ が $\tilde{v}_2 > 0$ で輸送されたものであるから、 $(\tilde{u}_2-U) \cdot \tilde{v}_2 \equiv (\tilde{u}_1(t=T_1) - \tilde{u}_1(t=T)) \cdot \tilde{v}_2$ とよい。このとき、式(6.32)から次式が得られる。

$$\begin{aligned} \overline{uv} &= \frac{1}{(1+\beta)} \{ (\overline{\tilde{u}_1 \tilde{v}_1} - \overline{\tilde{u}_1} \cdot \overline{\tilde{v}_1}) + \overline{\tilde{v}_1} \cdot \\ &(\tilde{u}_1(t=T) - \tilde{u}_1(t=T_1)) \} \quad (6.35) \end{aligned}$$

摩擦速度 U_* は定義により $U_*^2 \equiv \overline{(\partial \tilde{u} / \partial y)}_{y=0}$ であるが、 $\beta \ll 1$ を考慮して式(6.30)から次のように近似できる。

$$U_*^2 \doteq \nu \int_0^T \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial y} \right)_{y=0} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} U_0 \sqrt{\frac{\nu}{T}} \quad (6.36)$$

以上は任意の一つのbursting現象に関する乱流特性値であるが、実際のbursting周期 T は一定ではなく、式(5.16)で示される対数正規確率分布 $p_T(T)$ を考慮したものではない。すなわち、実際の摩擦速度は式(5.16)~(5.18)から次のように与えられる。

$$U_*^2 = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} U_0 \sqrt{\frac{\nu}{T}} \right) p_T(T) dT = \frac{2}{\sqrt{\pi}} U_0 \sqrt{\frac{\nu}{T_B}} \cdot r^{-3/4} \quad (6.37)$$

また、例えば U は式(6.30)から次式で与えられる。

$$\frac{U}{U_0} = \int_0^\infty p_T(T) dT \int_0^1 \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{\nu T \tau}} \right) d\tau$$

$s \equiv \log(T/T_0)/\sigma_0$ と変数変換すれば $p_T(T)$ は正規化されたGauss分布 $G(s)$ となるから次式が得られる。

$$U^+ \equiv U_0^+ \Phi(y^+) = U_0^+ \int_{-\infty}^\infty G(s) ds \int_0^1 \operatorname{erf}(\Theta) d\tau \quad (6.38)$$

ここで $G(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-s^2/2)$ であり、また Θ は式(6.37)

を使って次のようになる。

$$\Theta \equiv \frac{y}{2\sqrt{\nu T}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} r^{1/4} \frac{y^+}{U_0^+} \frac{1}{\sqrt{10} \sigma_0 s \cdot \tau}$$

同様にして、式(6.34)は次のようになる。

$$\left(\frac{u'}{U_*} \right)^2 = U_0^{+2} \int_{-\infty}^\infty G(s) ds \int_0^1 \{ \operatorname{erf}(\Theta) \}^2 d\tau - U^{+2} \quad (6.39)$$

$$\left(\frac{v'}{U_*} \right)^2 = \frac{r^{1/2}}{(1+\beta)(2\alpha U_0^+)^2} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{G(s)}{10 \sigma_0 s} ds \int_0^1 \frac{(1 - \exp(-\Theta^2))}{\tau} d\tau + \frac{1}{\beta} \Psi(y^+) \right] \quad (6.40)$$

ここで、 $\Psi(y^+) \equiv \int_{-\infty}^\infty \frac{G(s) ds}{\sqrt{10} \sigma_0 s} \int_0^1 \frac{(1 - \exp(-\Theta^2))}{\sqrt{\tau}} d\tau$

$$\begin{aligned} -\frac{\overline{uv}}{U_*^2} &= \frac{r^{1/4}}{(1+\beta) \cdot 2\alpha} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{G(s)}{\sqrt{10} \sigma_0 s} ds \int_0^1 \frac{(1 - \exp(-\Theta^2)) \cdot \operatorname{erf}(\Theta)}{\sqrt{\tau}} d\tau - \Phi(y^+) \cdot \Psi(y^+) \right] \\ &+ \Psi(y^+) \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} r^{1/4} \frac{y^+}{U_0^+} \right) \right] \quad (6.41) \end{aligned}$$

最後に、burstingの平均周期 T_B は式(6.37)から

$$\frac{T_B U_*^2}{\nu} = \frac{4 r^{-3/2}}{\pi} U_0^{+2} \quad (6.42)$$

以上の更新モデルから、パラメータ α, β, r 及び U_0^+ を適当に選べば(式(5.18)に示すように r は変動係数 ϕ の関数である)、平均流速 U^+ 、乱れ強度 u'/U_* 、 v'/U_* 、Reynolds応力 $-\overline{uv}/U_*^2$ の各分布や平均周期 $T_B U_*^2/\nu$ 等を予測することができる。

6.3.3 更新モデルによる乱流特性量の評価

(a) 平均流速分布

まず、変動係数 ϕ を零($r=1$)とおき、壁面領域端での主流速 U_0^+ を与えて平均流速分布 U^+ を式(6.30)によって検討する。

Fig. 6.13は、 U_0^+ を13から17まで変化させたときの U^+ の分布を示したものであり、Nikuradseの実験値を用いて表示したPrandtlの対数則式(2.14)及び式(2.13)を用いたvan Driestの分布も比較のため併示した(Fig. 2.19参照)。更新モデルでは $y^+ > 50$ で U^+ の分布がほぼ平坦となり主流速 U_0^+ に漸近するから、式(6.28)の境界条件は比較的早く満足される。Fig. 2.20に示すCorino

ら(1969)の観察結果によれば、²²⁾ 典型的な bursting 現象はせいぜい $y^+ \lesssim 50$ 以内 (buffer 層で最も顕著である) で生じるから、以下では $0 < y^+ < 50$ の領域に注目して考察を進める。

対数則分布と式 (2・13) の粘性減衰因子 Γ を考慮した van Driest の分布とが $30 < y^+ < R_*$ の範囲で良好に一致するという事実に基づいて、更新モデルによる計算結果を検討すると、主流速を $U_0^+ = 15$ に選べば壁面領域の平均流速分布を良好に表わすことがわかる。

次に、 $U_0^+ = 15$ とし、変動係数 ϕ を 0 から 2 まで変化した計算結果が Fig. 6・14 に示される。 ϕ が大きいほど U^+ は減少するが、それほど大きな差異はない。 $y^+ = 10$ の粘性底層端付近での更新モデルの結果は van Driest の分布から若干ずれを示す。一方、式 (6・29) より正確な初期条件を与えて計算された Black の結果を Fig. 6・14 に併示したが、¹¹⁾ 確かに van Driest の分布と良好に一致している。このことから、Black が用いた初期条件を使って更新モデルを改良すれば、乱流特性をより満足に定量評価できるものと期待でき、今後の検討が必要である。

なお、壁面のごく近傍では $\text{erf}(\theta) \doteq 2\theta/\sqrt{\pi}$ となり、式 (6・38) から $U^+ \doteq y^+$ となって粘性底層内の式 (2・15) と完全に一致する。

(b) 乱れ強度分布

まず、 u'/U_* の分布は U_0^+ が決まれば式 (6・39) から直ちに数値計算できる。Fig. 6・15 は、 $U_0^+ = 13, 15, 17$ に関する $\phi = 0$ の場合の計算結果を示し、また Laufer (1954)、²³⁾ Grass (1971) ²⁴⁾ 及び Eckelmann (1974) ²⁵⁾ 等による実験結果も併示した。 U_0^+ が増加すれば u'/U_* も増加し、平均流速分布と同様に $U_0^+ = 15$ のときが最も妥当な値を示すといえるが、この場合でも $y^+ \gtrsim 20$ では明らかに実験値の特性を示さない。すなわち、更新モデルは u'/U_* のピーク特性を説明するが、それ以降の低減率が過大であって、大きい欠陥をもっていることがわかる。これは、大きな y^+ では 6・3・1 で行った 2) 及び 3) の単純化が許されないためであり、理想的な bursting 現象が存在しない以上、渦の発達期といえどもその非線形なカップリング効果や圧力変動効果を見逃すことができないことを示している。また、主流速 U_0^+ を一定としたが、実際には時間の関数であり、平衡領域との関連性から決定されねばならない。もちろんこれらの改善は容易ではないが、式 (6・27)' の厳密解をゆりめて例えば $U_0^+ = \bar{U}_0^+ (1 + \varepsilon \sin(2\pi t/T))$, ($\varepsilon < 1$) とおけば、 $d(u'/U_*) \doteq \varepsilon \bar{U}_0^+ / \sqrt{2}$ だけ増加するから、多少なりとも改善されるであろう。

更新モデルのもう一つの欠点は壁面近傍での u'/U_* の増加率が過大になることである。式 (6・39) から $y^+ \rightarrow 0$ のとき

$$u'/U_* = By^+ + O(y^{+3}) \quad \dots\dots\dots (6・43)$$

で、 $B \doteq 0.9$ となり、実験値 $B \doteq 0.3$ の約 3 倍にもなる。

次に、 v'/U_* の分布を得るには、まず式 (6・40) で α 及び β の値を決めねばならないが、 $\alpha \leq 1$, β は微小な値であるから、仮に $\beta = 0.01$ とおき、 α を 0.5, 0.7, 1.0 の 3 通りに変えた計算結果を Fig. 6・16 に示した。 v'/U_* は y^+ が大きいときほぼ 1 であったから $\alpha = 0.7$ が最も妥当であり、この値は従来の実験結果とほぼ一致する。⁵⁾ Fig. 6・15 には、 $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.01$ とし、 U_0^+ を 3 通り変えた計算結果を示したが、予測通り、 $U_0^+ = 15$ の曲線は実験値と良好な一致を示し、更新モデルで $U_0^+ = 15$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.01$ を与えると最も満足すべき結果が得られることがわかる。

以上は変動係数 ϕ を零とした結果であり、次に ϕ を考慮した特性を検討する。さて、第 5・4 節で論じたように、正確な ϕ の値は与えられないが、Fig. 5・37 から判断して ϕ は 2 以下となろう。Fig. 6・17 は、 ϕ を 0 から 1.5 まで変化した場合の計算結果である。 ϕ が大きくなると $y^+ > 10$ での u'/U_* は増大し、 y^+ に対する減少率も小さくなりより実際に近いものとなる。Fig. 6・15 の実験値と比較すれば $\phi = 0.5 \sim 0.7$ が最も適切な値を示すようであるが、bursting 現象のゆらぎを ϕ の形で導入しても $y^+ > 30$ ではなお実験値との差異は大きく、当然非線形効果を無視できないものと考えられる。

一方、 v'/U_* は ϕ の値によってほとんど差異がなく、Fig. 6・15 に示すように実験値との一致もきわめて良好であることから、 u'/U_* と比較してむしろ注目に値する。 \bar{u} は原理的に \bar{u} から導かれたことを考えると、この一致は偶然かも知れないが、更新モデルの妥当性を示す一例であろう。多分、この原因は式 (6・31) の積分操作にあると考えられる。 y^+ が大きくなると \bar{u} は coherent な渦運動との関連が薄くなるが、一方 \bar{v} は常に壁面からの積分で得られるから、 y^+ が十分大きくなってもこの運動のすべてを平均的に含み、すなわち累積効果が現われるためにこの良好な結果が得られたものと推論される。

以上の乱れ強度に関する結果を総括すれば、更新モデルは $y^+ > 30$ では近似度が低い、 $y^+ \leq 30$ の buffer 層以下の乱れ強度を定量的にもかなり良好に表わすといえる。そして、 u'/U_* は $y^+ = (10 \sim 20)$ で最大値をもつが、 v'/U_* は単調に増加するという際立つた特性の違いを満足に説明する。

(c) Reynolds 応力分布

buffer 層以下の壁面近傍での Reynolds 応力の実測値は油流実験から得られた Eckelmann (1974) のものが現在唯一であり、²⁵⁾ Fig. 6・20 に示されるが、また実測例が乏しい。一方、Reynolds 応力分布は dU^+/dy^+ が既知であれば式 (2・5) から理論的に求められるが、この dU^+/dy^+ とし式 (2・13) の van Driest の混合距離を使った式 (2・11) が妥当な結果を与えることが第 2・2 節で明らかにされ

(Fig. 2・2参照), またFig. 6・20に見られるように上述の Eckelmann の実測値とも確かに良好な一致を示す。したがって, 壁面近傍での Reynolds 応力分布に関する詳細な定量的検討は今後の課題として, 以下ではとりあえず上述の van Driest の半理論曲線を正確な分布形と考へて, 更新モデルから得られる結果を比較検討してみる。

さて, Fig. 6・16, 6・18 及び 6・19 は, それぞれパラメータ α , U_0^+ 及び ψ を変化させて式 (6・41) を計算した結果である。これらの結果と van Driest の半理論曲線との比較から, $U_0^+ = 15$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.01$ 及び $\psi = (0.5 \sim 1.0)$ とした先述のパラメータの決定は Reynolds 応力分布にも満足に適用される。式 (6・41) で求まる Reynolds 応力は流速変動 $u(t)$ と $v(t)$ との積で評価された定義通りのものであるから, この精度は各流速変動のそれより 1 オーダ低くなる。前述した乱れ強度分布の結果から v' の精度は良好であったから, $-\bar{uv}$ の精度は主に u' のそれに支配される。実際, Fig. 6・19 で van Driest の曲線と比較すると, 式 (6・41) から得られる $-\bar{uv}$ の値はほぼ同じオーダであるが, y^+ が大きくなると急激に減少し, u' と同様な欠陥が現われる。しかし, $y^+ < 30$ に限っていえば, この更新モデルは Reynolds 応力の構造の説明にも十分使えるものと考えられる。また, 第 4・4 節によれば壁面領域での相関係数 $R = -\bar{uv}/u'v'$ は 0.3 ~ 0.4 であり, Fig. 6・19 の更新モデルによる R もほぼ同じ値を示している。ただ, y^+ が小さいとき $R > 1$ となって不合理な結果を与える。これは, 先述したように y^+ が小さいとき式 (6・29) の初期条件が適切ではなく, 式 (6・35) の第 2 項が過大となるためであり, Black が用いたような初期条件から再検討する必要がある。

ところで, 瞬間 Reynolds 応力の挙動が議論の対象となる bursting 現象に関する考察を別にすれば, 平均 Reynolds 応力 $-\bar{uv}$ の評価には $u(t)$ と $v(t)$ の変動特性に基づく式 (6・41) より式 (2・5) の運動方程式に基づいて, 良好な結果が得られた U^+ から算出する方が高精度の結果が期待できる。このとき, 式 (2・5) と式 (6・38) とから次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{-\bar{uv}}{U_*^2} &= \left(1 - \frac{y^+}{R_*}\right) - \frac{\tau^{1/4}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(s) ds}{\sqrt{10} \sigma_0 s} \\ &\times \int_0^1 \frac{\exp(-\theta^2)}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad \dots\dots\dots (6\cdot44) \end{aligned}$$

Fig. 6・20 は, $R_* = 500$ での式 (6・44) 及び van Driest の曲線を示し, また先述の Eckelmann の実験結果も併示される。図から明らかなように, これらの一致は比較的良好であり, 式 (2・5) の運動方程式を介すれば更新モデルからでもかなり高精度に Reynolds 応力を評価することができる。

以上のように, 更新モデルには改良すべき面も多いが, 壁面領域とりわけ buffer 層の乱流特性を定量的にもかなり満足に説明しうるから, 本章の研究目的の一つである bursting 現象の内部機構の説明をこのモデルから行えるものと考えられ, 次節で検討する。

6・3・4 更新モデルによる乱れ発生機構の説明

更新モデルの最も優れた点は瞬間流速分布を近似的にも評価でき, bursting 現象の変化過程を説明できることである。

まず, Fig. 6・21 は, bursting 現象の一周期 T 内での各時刻 $\tau = t/T$ における瞬間流速分布 $\tilde{u} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ を式 (6・30) ~ (6・32) から計算して図示したものである。なお, 計算に必要なパラメータは, 前節の結果から $U_0^+ = 15$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 0.01$ と選ばれた。

τ が小さい初期段階で加速流 ($u > 0$) が buffer 層へ侵入する ($v < 0$)。時間の経過と共に \tilde{u} は漸次歪んで来て, $\tau = 0.5$ すなわち半周期でほぼ平均流速に一致した後, 減速流 ($u < 0$) に転じ, \tilde{u} はさらに歪んでくる。この渦の発達期間 $T_1 = T$ 内で流速分布は最大限に歪みされ, これに抗しきれなくなった途端, 渦は $\beta = 0.01$ というごく短時間の内に崩壊して応力の解除 (stress-relieved) が行われ, 高エネルギーが上方へ ($\tilde{v} > 0$) 放出される。この流速分布特性は Fig. 2・20 で示した Corino らの観察結果や Fig. 6・6 の bursting 現象の概念図とよく一致するし, また更新モデルは理想化されたものとはいえ Fig. 5・40 で示した実際の流速分布の挙動を近似的に説明している。

当然, 加速流が侵入する初期段階が sweep 運動に, 減速流が崩壊する終局段階が ejection 運動にそれぞれ相当している。また, \tilde{u} 分布の歪みの程度を次の排除厚 δ_* で表わせば,

$$\delta_* \equiv \int_0^\infty \left(1 - \frac{\tilde{u}^+}{U_0^+}\right) dy = 2\sqrt{\frac{\nu T}{\pi}} \cdot \sqrt{\tau} \dots (6\cdot45)$$

であり, Fig. 6・4 や 6・6 の概念図と同様に \tilde{u} 分布の歪みは $\sqrt{\tau}$ に比例して増加すると考えてよい。

次に, Fig. 6・22 は瞬間 Reynolds 応力 $-uv$ を \tilde{u} 及び \tilde{v} から計算した結果である。先述のように, $y^+ \geq 50$ では $\tilde{u}^+ \equiv U_0^+$ (一定) となる本モデルの欠陥 (Fig. 6・21 を参照) から, $-uv$ も計算上ではほぼ零となってここでの議論はできないが, 少なくとも buffer 層内の議論はできよう。

τ が約 0.1 までは sweep 事象であり, 正の Reynolds 応力を発生する。0.1 < τ < 1.0 までは Reynolds 応力への寄与はほとんどなく, $\tau > 0.5$ では負の応力さえ発生して interaction 事象の存在を示している。 $\tau = 1 + \beta$ ではご

く短時間に ejection 運動が生じ、莫大な正の応力が発生することがわかる。— uv の発生 の最大位置は時刻 τ によって変化するが、ほぼ $10 < y^+ < 20$ にあって乱れ発生率 P や u'/U_* が最大値を示す位置とほぼ同じである。

各 y^+ の位置での $-uv(\tau)$ の時間変化が Fig. 6・23 に示される。このモデルでは、ejection の直後に sweep が起こり、次の ejection までかなり「静か」な発達状態が続くが、これは Fig. 6・6 の Hinze のモデルをよく説明する。詳しく言えば、sweep と ejection 運動の時間占有率は約 0.1 となる。一方、第 5 章の点計測結果ではこれらの運動の発生判定レベル H は約 5 程度であり、Fig. 5・10 から $(T_2 + T_4)$ はやはり約 0.1 となって両者の一致は極めてよい。また、典型的な bursting 現象が現われる buffer 層内の ejection 運動は $\beta = 0.01$ 間に $u\bar{v}/\bar{u}\bar{v} = u\bar{v}/U_*^2$ が 40 にも達するパルス的な挙動を示すが、これは第 5・3 節の実測結果 (Fig. 5・26) とほぼ一致する。このモデルによると $-u\bar{v}/U_*^2$ への寄与は ejection 運動で約 $40\beta = 0.4$ 、sweep 運動で約 0.2 となり、Fig. 6・19 から $-u\bar{v}/U_*^2 \approx 0.6$ であるから $RS_2 \approx 0.67$ 、 $RS_4 \approx 0.33$ となる。多分、非線形効果と考えられる interaction 事象をこのモデルでは妥当に予測できないために上述の値は実測結果と若干異なるが、単純なモデルの割には良好な結果が得られる。

最後に、Fig. 6・24 は、式 (6・42) から計算された bursting 周期 T_B を ϕ の関数として示したものである。 U_0^+ や ϕ が大きいほど周期 T_B も大きくなるが、 $U_0^+ = 15$ 、 $\phi = (0.5 \sim 1.0)$ では $U_*^2 T_B / \nu$ は約 400 程度である。いま、式 (5・12) を使って R_θ を計算し、その結果を破線で図に示した。上述の値は $R_\theta = 5000 \sim 8000$ に相当し、通常の実験では若干大きめであるが、かなり妥当な値であると考えられる。また、 \bar{u} 分布の平均的な歪み、換言すれば不安定さの程度を δ_* の平均で表わせば、式 (6・45) から

$$\bar{\delta}_* = \int_0^T P_T(T) dT \int_0^1 \delta_* d\tau = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\nu T_B}{\pi}} r^{1/4} \quad \dots\dots\dots (6\cdot46)$$

であり、式 (6・42) を使うと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{\delta}_* U_0}{\nu} &= \frac{8}{3\pi} r^{-1/2} U_0^{+2} \\ \frac{\bar{\delta}_* U_*}{\nu} &\equiv \frac{\bar{\delta}_*^+}{\delta_*^+} = \frac{8}{3\pi} r^{-1/2} U_0^{+} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6\cdot47)$$

いま、平均流速を \bar{u} で近似すれば $R_e \approx \bar{u} U_0 / \nu \approx 8 \cdot \bar{\delta}_* U_0 / \nu$ であるから、 $U_0^+ = 15$ 、 $\phi = (0.5 \sim 1.0)$ に対する粘性底層を含めた buffer 層の不安定さに対応した R_e は 1600 \sim 1800 となり、ほぼ限界 Reynolds 数に相当する。また、このとき $\bar{\delta}_*^+ = 13 \sim 15$ であって、排除厚 $\bar{\delta}_*^+$ がほぼ粘性底

層外縁に相当する。これらの結果は、bursting 現象の発生原因は底層外縁の流れの不安定さにあるとする従来の見解を例証するものといえる。また、この流れではほぼ限界 Reynolds 数に達するから、bursting 現象は層流—乱流の遷移機構とよく類似するという指摘⁵⁾ に一つの根拠を与えるものである。

第 6・4 節 結合モデル (Combined model)

6・4・1 粘性底層外縁と境界層外縁との類似性

これまでの考察から、更新モデルは壁面領域に、 π -型渦モデルは平衡領域に共にかなり満足に適用されることが確かめられたが、これらのモデルの立脚点は相違するから、両者を理論的に接続することは困難である。

ところが、Fig. 6・15 で示したように更新モデルから評価された v'/U_* は非常に妥当な値を示し、平衡領域での式 (6・26) と良好に接続するものと考えられる。すなわち、更新モデル ($U_0^+ = 15$ 、 $\alpha = 0.7$ 、 $\beta = 0.01$ 、 $\phi = 0.5 \sim 1.0$) では $y^+ \rightarrow 100$ で $v'/U_* \rightarrow 0.93$ となる。一方、 π -型渦モデルでは $R_* = 600$ のとき式 (6・26) から $y^+ \rightarrow 100$ で $v'/U_* \rightarrow 0.846 D_2$ 、第 4・3 節の結果から普遍定数 D_2 を 1.27 に選べば $v'/U_* \rightarrow 1.07$ となる。いま、Fig. 4・8 にこれらの結果を比較したが、両モデルはかなり良好に接続することが確かめられる。次に、Fig. 6・20 から Reynolds 応力 $-u\bar{v}/U_*^2$ に関しても式 (6・44) を使う限り、平衡領域の式 (4・20) に良好に接続するといえる。

しかし、 u'/U_* に関しては、先述の更新モデルの欠陥によって明らかに両モデルをそのまま接続させることはできない。いま、正確な u'/U_* の実測値が壁面のごく近傍まで得られていることから、両モデルを適当な仮定のもとに接続する結合モデルを考え、これらの特性を記述することを試みる。

この結合モデルは粘性底層外縁 (viscous sublayer) と境界層外縁 (viscous superlayer) との類似性に立脚しており、それを概観したものが Fig. 6・25 である。前者は内部パラメータ、後者は外部パラメータというスケールの相違はあるが、両者の乱流特性はよく類似する。すなわち、粘性底層外縁では層流 (不完全な擬似層流) と乱流とが相互に入り込んだ複雑な界面をもち、前節で論じたように層流・乱流の遷移状態に似た不安定な流れが形成され、間欠的な bursting 現象がその特徴である。一方、境界層外縁は乱流と非乱流とが入り込み、大きな intermittent 現象がその特徴である。

ところで、境界層外縁を intermittency 因子 γ で一般に表わすが、²⁶⁾ 粘性底層外縁ではこれに対応するものとして damping 因子 Γ を導入する。すなわち、完全乱流なら

ば $r \rightarrow 1$, $\Gamma \rightarrow 1$ であるが、境界層外縁の非乱流では $r \rightarrow 0$, これに対応する粘性底層の擬似層流では粘性のために減衰して $\Gamma \rightarrow 0$ となろう。

Γ の分布は不明であるが、 r が通常誤差関数で近似されることから Γ もこれに類似するものと考えられる。そして、平均流に関しては van Driest が得た式 (2.13) が良好な結果を与えるから、 Γ として式 (2.13), すなわち、

$$\Gamma \equiv 1 - \exp(-y^+/A) \quad \dots\dots\dots (6.48)$$

と仮定しうる。当然、 $y^+ \rightarrow \infty$ が完全乱流域 ($\Gamma = 1$), $y^+ \rightarrow 0$ が擬似層流域 ($\Gamma = 0$) に相当している。

6・4・2 結合モデルによる乱れ強度の評価

境界層外縁で観測される乱れ強度 u' は、乱流域での値 u'_T と非乱流域での値 u'_L とから次式で評価される。²⁶⁾

$$u'^2 = r u_T'^2 + (1-r) u_L'^2 \quad \dots\dots\dots (6.49)$$

粘性底層外縁の乱れ強度 u' に関しても完全乱流域での値 u'_T と擬似層流域での値 u'_L とから同様に評価されるが、ここでは Γ で簡単に重み付け平均ができると仮定する。^{*} すなわち、

$$u' = \Gamma u'_T + (1-\Gamma) u'_L \quad \dots\dots\dots (6.50)$$

次に、完全乱流域の値 u'_T は、 y^+ が十分に大きい場合であるから平衡領域での u' と一致し、 π -型渦モデルで与えられる。一方、擬似層流域の値 u'_L は更新モデルから式 (6.43) で与えられる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} u'_T/U_* &= D_1 \cdot \exp(-y^+/R_*) \quad (\text{完全乱流域}) \\ u'_L/U_* &= B \cdot y^+ \quad (\text{擬似層流域}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6.51)$$

普遍定数 B, D_1 は、これまでの実験結果から $B = 0.3$, $D_1 = 2.3$ で与えられる。

以上から、式 (6.48) を使って次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{u'}{U_*} &= (1 - \exp(-y^+/A)) \cdot D_1 \exp(-y^+/R_*) \\ &\quad + \exp(-y^+/A) \cdot B y^+ \quad \dots\dots\dots (6.52) \end{aligned}$$

さて、 A も実験定数であり、平均流速分布に関しては $A = 27$ であった。これは、平均流速が buffer 層外縁 ($y^+ \sim 30$) から粘性の作用を強く受けて対数則からずれる結果と解釈できる。本節の結合モデルでは粘性底層外縁がこれに対応しているから、 $y^+ = A$ を 10 程度と考えてよい。

Fig. 6・26 には、 $A = 10$ とした場合の式 (6.52) の計算曲線を示しており、 R_* を 10^2 から 10^4 まで大幅に変えている。信頼のおける実験値として、Laufer (空気流),

^{*} r は乱流域の時間占有率であるから u'^2 に関する平均が必要である。一方、 Γ は u' に対する粘性作用の効率を示す関数であるから、 u' に関して平均してよいと考えられる。

Grass (水流), Eckelmann (油流) 及び著者ら (水流) による結果を併示した。図から明らかなように、実験値と式 (6.52) との一致は非常に良好である。 u'/U_* が最大値に達するまではあまり R_* に依存せず、ほぼ単一の曲線であるが、最大値を過ぎると R_* が小さいほどその減少率は大きい。

このように、本節で提案した結合モデルは一種の経験則であるが、任意の R_* に対して全領域にわたる u'/U_* の変化特性を良好に表現し、極めて合理的なモデルと考えられる。さらに、粘性底層まで含めた全領域の u'/U_* に関する単一の普遍関数が従来得られなかった点を考慮すれば、上述の結果は実用的にも十分意義あるものとする。この実用価値を示す一例として、粗面乱流をも含めた壁面領域における $(u'/U_*)(U^+)^{-1/3}$ の普遍特性が 4・3・4 で明らかにされたから、この普遍関数曲線を結合モデルを使って検討してみる。 U^+ として更新モデルの式 (6.38), u'/U_* として結合モデルの式 (6.52) を使って得られる $(u'/U_*)(U^+)^{-1/3}$ の計算曲線が Fig. 4・7 に示された。図から明らかなように、実測値と十分な精度で一致し、この乱流モデルは十分満足いく普遍関数曲線を提示することが確認される。

最後に、結合モデルから評価される乱れ強度の最大値 $(u'/U_*)_{\max}$ とその発生位置 y^+_{\max} を R_* の関数として Fig. 6・27 に示した。これによると、 R_* が大きいほど最大値及びその位置は大きくなるが、 R_* が 1000 以上ではほとんど一定値に達して $(u'/U_*)_{\max} = 2.81$, $y^+_{\max} = 17.7$ に収束する。すなわち、粘性底層外縁で最大値に達し、これらの結果は実験値とよく一致する。

第6・5節 結 言

本章は、平衡領域に π -型渦モデルを、壁面領域に更新モデルを、そして両者を接続させるものとして結合モデルをそれぞれ提案して、これらの乱流特性を説明しようとしたものである。すなわち、 π -型渦モデルは乱流場の平衡状態に、一方更新モデルは bursting 現象の周期性にそれぞれ主眼をおいて展開され、また結合モデルは粘性底層と境界層の両外縁の類似性に着眼してモデル化された。

その結果、各領域の乱流特性はこれらのモデルによって定性的のみならず定量的にもかなり良好に説明され、ほぼ満足すべきモデルであると結論できる。とりわけ、複雑かつ難解な bursting 現象を比較的単純な更新モデルによってかなり満足に記述できた点は注目されよう。しかし、なお改良すべき面も多く、また壁面粗度や自由水面等の影響を考慮に入れた実際現象により近いモデルの展開がさらに必要と考える。

第6章 参考文献

- 1) Townsend, A. A. : The structure of turbulent shear flow, Cambridge Univ. Press, 1956.
- 2) Grant, H. L. : The large eddies of turbulent motion, J. Fluid Mech., vol.4, pp.149-190, 1958.
- 3) Einstein, H. A. & Li, H. : The viscous sublayer along a smooth boundary, Proc. of ASCE, EM-2, pp.1-27, 1956.
- 4) Hanratty, T. J. : Turbulent exchange of mass and momentum with a boundary, A. I. Ch. E. Jour., vol.2, pp.359-362, 1956.
- 5) Hinze, J. O. : Turbulence (2-nd ed.), McGraw-Hill, pp.586-770, 1975.
- 6) Tani, I. : Review of some experimental results on boundary-layer transition, Phys. of Fluids, vol.10, pp.S11-S16, 1967.
- 7) Willmarth, W. W. & Tu, B. J. : Structure of turbulence in the boundary near the wall, Phys. of Fluids, vol.10, pp.S134-S137, 1967.
- 8) Favre, A., Gaviglio, J. & Dumas, R. : Structure of velocity space-time correlations in a boundary layer, Phys. of Fluids, vol.10, pp.S138-S145, 1967.
- 9) Sternberg, J. : On the interpretation of space-time correlation measurements in shear flow, Phys. of Fluids, vol.10, pp.S146-S152, 1967.
- 10) Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A. & Runstadler, P. W. : The structure of turbulent boundary layers, J. Fluid Mech., vol.30, pp.741-773, 1967.
- 11) Black, T. J. : A new model of the shear stress mechanism in wall turbulence, AIAA 6-th Aero. Sci. Meeting, AIAA Paper No.68-42, 1968.
- 12) 余越正一郎 : 河川乱流に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1970.
- 13) Nakagawa, H. & Nezu, I. : On a new eddy model in turbulent shear flow, Proc. of JSCE, No.231, pp.61-70, 1974.
- 14) Clark, J. A. & Markland, E. : Flow visualization in turbulent boundary layers, Proc. of ASCE, HY-10, pp.1653-1664, 1971.
- 15) 福岡, 石川および中川, 綱津 : 'On a new eddy model in turbulent shear flow' への討議および回答, 土木学会論文報告集 No.245, pp.77-78, 1976.
- 16) Tennekes, H. & Lumley, J. L. : A first course in turbulence, MIT Press, pp.59-103, 1972.
- 17) Batchelor, G. K. : The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press, 1953 (巽友正(訳) : 乱流理論, 吉岡書店, 1960)
- 18) Lamb, H. : Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, pp.614-616, 1932.
- 19) 井上栄一 : 地表風の構造 ; 農業技研報告, A-第2号 1952.
- 20) Laufer, J. : Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel, NACA, TR-1053, 1951.
- 21) 今本博健, 浅野富夫, 佐々木健 : 開水路流れにおける乱れの広がりについて, 第29回土木学会年講, Ⅱ-176 1974.
- 22) Corino, E. R. & Brodkey, R. S. : A visual investigation of the wall region in turbulent flow, J. Fluid Mech., vol.37, pp.1-30, 1969.
- 23) Laufer, J. : The structure of turbulence in fully developed pipe flow, NACA, TR-1174, 1954.
- 24) Grass, A. J. : Structural features of turbulent flow over smooth and rough boundaries, J. Fluid Mech., vol.50, pp.233-255, 1971.
- 25) Eckelmann, H. : The structure of viscous sublayer and the adjacent wall region in a turbulent channel, J. Fluid Mech., vol.65, pp.439-459, 1974.
- 26) Rotta, J. C. : Turbulente Strömungen, B. G. Teubner, 1972 (大路通雄(訳) : 乱流, 岩波書店 pp.152-159 1975.)

第2編 浸透床上の開水路流の乱流構造に関する研究

第7章 概 説

第1編では開水路せん断乱流のうちで最も基本的な2次元不浸透床壁面乱流を対象として、本論文の緒論で提示された(1)から(5)までの研究課題を理論的及び実験的に解明するべく基礎的研究を系統的に行ってきた。今後の検討に残された面も多いが、開水路乱流の物理機構が相当明らかにされ、実際河川の乱流構造の解明やその応用的発展を図る際に貴重な基礎的知見を与えるものと考えられる。この水工学上の実際問題に現われる種々の乱流現象は非常に複雑であり、2次元開水路乱流に限っても第1編での流れにさらに次のような境界条件、すなわち

① 河床面下に浸透流が存在し、河川主流との相互作用が無視できないとき

② 河床面を通して定常的に水流の出入りが存在するとき

③ 河床面が凸凹の不連続壁面や波状壁面であるとき

④ 移動河床面であり、流れと河床とが相互作用するとき

⑤ 浮遊砂等が存在し、混相流となるとき

が加わるから、その理論的解明はもちろんのこと実験的解明も相当困難であり、平均流特性に関してさえ不明な点が多いのが現状である。したがって、このような複雑な乱流構造を明らかにするには第1編での知見を基礎として逐次系統的に研究することが不可欠であろう。

本編は、緒論で提示された残りの(6)及び(7)の課題を解決する目的で、上述の①及び②の境界条件が加わった、すなわち浸透床上の開水路流の乱流構造に関して第1編での知見を手掛りとして理論的及び実験的研究を行おうとするものである。

いま、河床境界面 ($y=0$) を垂直に流れる定常な流出入 (transpiration) の流速を v_0 と定義すれば*)、第1編の

*) 流体力学での慣用名に従い、 $v_0 > 0$ を吹出し (injection あるいは blowing)、 $v_0 < 0$ を吹込み (suction)、両者を総称して "transpiration" と呼ぶことにする。したがって、"transpiration" は日常使われる「蒸発散」をここでは意味しない。

不浸透床上の乱流構造に v_0 という特性速度スケールが新たに加わり、いわゆる多重特性スケール系を構成するから、この乱流構造の理論的・実験的解明は極めて困難となる。¹⁾ しかも、この種の基礎的研究は、Fig. 1・1に見られるように、むしろ機械工学、航空工学、化学工学等の分野で境界層流や管路流を対象として行われてきたが、²⁾ 水工学ではごく一部を除きほとんど未開拓な分野である。³⁾ したがって、厳密な理論展開や高精度の実験計測がすぐには困難であるとしても、浸透床上の開水路乱流の構造を明らかにすることは極めて意義深い。

まず、第8章では課題(6)を解決する目的で、 $v_0 = 0$ であるが河床がルーズであるために河床面近傍で生じる主流と浸透流との相互作用を考察し、このとき発生する誘導応力に関して理論的及び実験的検討を行う。

次に、第9章は、課題(7)を解明するために、 $v_0 \neq 0$ の壁面からの流出入を伴う開水路滑面乱流を対象として、この平均流特性及び乱れ特性を理論的及び実験的に考察し、第1編での不浸透床上の流れとの比較検討から開水路乱流の制御法を見い出そうとするものである。

第7章 参考文献

- 1) Tennekes, H. & Lumley, J. L. : A first course in turbulence, MIT Press, 1972.
- 2) Schlichting, H. : Boundary layer theory, McGraw-Hill, 1968.
- 3) Escande, L. (中山謙二(訳)) : 境界層の吸込みによる流況の変更, 土木学会誌, 第48巻, pp. 4-8, 1963.

第8章 壁面からの定常な流出入がない場合の 浸透層上の乱流構造に関する研究

第8・1節 緒 言

水路床の透水係数が小さくて路床面下の浸透流の影響が無視できる場合は第1編で論じた粗面乱流となるが、水路床がよりルーズとなり、この浸透流の存在が無視できない場合（以下ポーラス乱流とよぶ）には境界面を通して主流と浸透流との動的な相互作用が生じるから、同一の水理条件でも粗面乱流に比べてポーラス乱流ではそれだけ運動量の交換が活発となり、付加的な応力が発生するものと予測される。Loveraら(1969)は平坦な自然河川の抵抗係数がNikuradseによる粗面乱流での値よりかなり大きいと報告し¹⁾、また草木上での地表風でも同様なことが観測されている事実も²⁾、一部主流と浸透流との動的相互作用に起因しているものと考えられる。

一般に、河床面下の浸透流は主流に比べて極めて小さいから、もし境界面を介して主流と浸透流との動的な相互作用や接続条件がなければ、ほぼDarcy則が成立するいわゆる層流域に属すると考えられる。しかし、浸透層の奥深い所は別として、河床境界面近くでは主流の影響を受けて、浸透流は相当速くかつ乱れていると考えられる。Fig. 8・1に示すように、この状況は滑面乱流の粘性底層の挙動と類似している。第1編で再三指摘したように、粘性底層は本来粘性の作用が卓越し、層流状態となるべきであるが、実際は粘性底層端($y^+ \approx 10$)を介してその外側の主流部(乱流部)と動的な相互作用を演じ、粘性底層内といえども流れは乱れていることが明らかにされた(Fig. 5・44参照)。この粘性底層内の速度変動を誘起するものは、その外側の主流部からの圧力変動いわゆる圧力の染み込み現象がおきているからであり、底層端を通じて圧力エネルギーが粘性底層の方へと拡散するためと4・7・3で理解された。

以上の実験事実から類推して、浸透層上の乱流場に関しても主流から浸透流へとその境界面を介して乱れを誘起し攪乱を与えるものは、主として境界面上の圧力変動であり、浸透流内へ圧力エネルギーが拡散して行くためと考えられる(Fig. 8・1参照)。

このような異なる流れの場の間に生じる動的相互作用を理論的及び実験的に解明することは一般に容易でないが、気流と自由水面との相互作用の結果生じる風波の発生機構は理論的にかなり明らかにされている。すなわち、Miles(1957)にはじまる風波の発生理論がこれである。³⁾ この理論の成功に刺激されて、Phillips(1967)はMilesの考

えをせん断乱流場に拡張・適用し、Reynolds応力の発生・維持機構(渦の相互作用の結果生じるから「誘導応力」という)を論じ、Townsendによる噴流の混合領域の実験に適用し、良好な結果を得た。⁴⁾

一方、Chuら(1972)は、円管内壁に浸透層を付けて気流実験を行い、観測した誘導応力を上述のPhillipsの理論から説明しようとした。⁵⁾しかし、比例定数としてPhillipsがせん断乱流場で予測した値0.12とは1オーダーも大きなMilesの理論での値 π を使ったことに疑問があり、また物理的説明にあいまいな点が多い。

本章は、開水路浸透層上の主流と浸透流との動的な相互作用をより物理的に説明するとともに、その結果生じる誘導応力の推定式をPhillipsの理論を適用して導き、次に実測値との比較検討からPhillipsの理論がこの乱流場に適用可能かどうかを論じようとするものである。⁶⁾

以上の議論に基づいて、主流と浸透流との動的な相互作用機構をFig. 8・2に示すように、まず主流の圧力変動によって浸透流に攪乱が誘起され、次にこのフィード・バックとして浸透流の乱れが主流に誘導応力を発生させるものと考えて、次節以下で順次考察する。

第8・2節 主流と浸透流との相互作用に 関する理論的予測

8・2・1 浸透流の基礎方程式

主流と同様に(式(2・1)及び(2・2)参照)、浸透層内の局所的流速 v_p も次のNavier-Stokesの式を満足しなければならない。すなわち

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} = F - \nabla \left(\frac{\tilde{p}}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 v_p - (v_p \cdot \nabla) v_p \quad \dots\dots\dots (8.1)$$

ここで、 F は体積力、 $\tilde{p} = P + p$ は圧力をそれぞれ表わす。

しかし、たとえポーラス粗度(浸透層の構成粒子)の配置などが規則的であっても、Fig. 8・3に示すように実際の流速 v_p を知ることは不可能に近いし、また実用上からもあまり意味はなく、むしろ実測可能な断面平均的な見かけ上の流速すなわち通常使われる浸透流速 q で置き換えた方がよい。 q はその定義から

$$q = \frac{1}{s} \int_s v_p ds \equiv n \langle v_p \rangle \quad \dots\dots\dots (8.2)$$

ここで、 n は浸透層の間隙率であり、 $\langle \rangle$ 記号は q が収束する範囲 s での断面平均を表わす。

式(8・1)の右辺の第3項は粘性抵抗項、第4項は慣性抵抗項であるが、いずれも局所的微分作用素で表示されているため、これらの断面平均値を求めることは式(8・1)を直接解く以上に困難であり、ここでは以下の経験則で近似させる。

まず、粘性抵抗は線形表示であって層流の抵抗を支配していると考えられるから、速度に比例するとみなしてよい。すなわち、

$$\nu \langle \nabla^2 v_p \rangle \equiv -\frac{\nu}{K} q \text{ (線形)} \quad (8・3)$$

ここで K は比例定数であって、以下では透水係数とよぶことにする。*)

次に、慣性抵抗は非線形表示であって乱流の抵抗の主因と考えられるから、速度の2乗に比例するとよい。抵抗の作用方向を考慮すると、

$$\langle (v_p \cdot \nabla) v_p \rangle \equiv \frac{C}{\sqrt{K}} |q| q \text{ (非線形)} \quad (8・4)$$

ここで、 C は比例定数であり、 K と同様に実験から求められねばならない。換言すれば、式(8・3)及び(8・4)は実験定数を含んだ経験則といえる。

Reynolds数は粘性抵抗に対する慣性抵抗の比であるから、浸透流のReynolds数 R_K として式(8・4)と(8・3)との比をとって $R_K \equiv \sqrt{K} |q| / \nu$ と定義され、透水係数 K が重要なパラメータであることがわかる。*) また、式(8・2)の発散をとれば、容易に $\nabla \cdot q = 0$ が求まり、 q も連続式を満足する。

以上から、式(8・1)は次式で近似される。

$$\frac{1}{n} \frac{\partial q}{\partial t} = F - \nabla \left(\frac{\tilde{p}}{\rho} \right) - \frac{\nu}{K} [1 + CR_K] q \quad (8・5)$$

次に、式(8・5)をFig. 8・4に示す開水路浸透層流に適用する。この浸透流は一次元場すなわち $q = (q_m + q_x, q_y, q_z)$ と考えられ、乱れ変動成分 q_x, q_y 及び q_z は平均浸透流速 q_m に比べて十分に小さいと仮定する。このとき、式(8・5)の時間平均をとれば、 y 方向成分は

$$P = \rho g \cos \theta \cdot (h - y) \quad (8・6)$$

であり、浸透層内でも平均圧力 P は静水圧分布を示すことがわかる(式(2・4)参照)。また時間平均された x 方向成分からは次式を得る。

$$(1 + CR_K) q_m = (Kg/\nu) I_e \quad (8・7)$$

ここで、 $I_e \equiv \sin \theta - \cos \theta \partial h / \partial x$ は、浸透層の動水勾配であり、主流のエネルギー勾配に一致している(式(2・3)参照)。また、 R_K は、乱れ変動成分が q_m に比べて十分

*) ここで定義された透水係数 K は「長さ」の2乗の次元をもつ。一方、土質力学等で慣用の透水係数 k は $k \equiv q_m / I_e$ と定義されるから、 $k = Kg/\nu$ であって、「速度」の次元をもつ。

小さいものとして、 $R_K \equiv \sqrt{K} q_m / \nu$ で近似された。

ところで、 I_e を q_m の2次式で表現しようとする試みはすでになされ、Ward(1964)はそれらの係数に次元解析的考察を行って式(8・7)を導いた。7)

いま、

$$R_K \ll 1/C \text{ ならば、 } q_m = (Kg/\nu) I_e \quad (8・8)$$

となって通常のDarcy則に一致する。

$$\text{また、 } R_K \gg 1/C \text{ ならば、 } q_m = (\sqrt{K} C \cdot g I_e)^{1/2} \quad (8・9)$$

武内(1970)は、空隙系モデルによって式(8・8)を層流領域で、式(8・9)を乱流領域でそれぞれ導いた。8) また、Arbhabhiramaら(1973)は、ポーラス粗度(平均粒径を d_m とする)の種類をいろいろ変えた多くの実験から式(8・7)の妥当性を確かめ、次の実験式を提案した。9)

$$C = 100 (d_m \sqrt{n/K})^{-1.5}, \quad (20 < d_m \sqrt{n/K} < 80) \quad (8・10)$$

したがって、透水係数 K が与えられれば、非線形の程度を表わす C を予測できる。

次に、浸透流の乱れ変動成分について考察する。境界面近くの浸透流は主流からの攪乱を受けて相当乱されている。いま、この領域の浸透流でも式(8・5)は近似的に満足され、さらに2次元攪乱場を仮定すれば、式(8・5)～(8・7)から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial t} &= -n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \alpha_1 q_x \\ \frac{\partial q_y}{\partial t} &= -n \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \alpha_2 q_y \end{aligned} \right\} \quad (8・11)$$

ここで、 $\alpha_1 \equiv (n\nu/K)(1 + 2CR_K)$ 、 $\alpha_2 \equiv (n\nu/K)(1 + CR_K)$ である。

連続式を使って時間項を消去すると次式となる。

$$\nabla^2 (p/\rho) = -\frac{C q_m}{\sqrt{K}} \frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (8・12)$$

式(8・11)及び(8・12)は q_x, q_y 及び p に関する線形微分方程式であるから、境界条件が定めれば容易に解ける。

なお、主流場での圧力方程式は式(2・36)であり、その主要項をとれば

$$\nabla^2 (p/\rho) = -2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8・13)$$

であって圧力変動の主な誘因は $(\partial U / \partial y)(\partial v / \partial x)$ とされている。10) 式(8・12)と(8・13)のPoisson方程式は非常に類似し、浸透層内の圧力変動の原因は $(q_m / \sqrt{K})(\partial q_x / \partial x)$ であると考えられ、両者の類似性はすでにFig. 8・1で定性的に示された。

8・2・2 浸透流の乱れ変動解析

Fig. 8・1(b)で示したように、境界面 ($y=0$)での主流の圧力変動によって誘起される浸透流の攪乱を以下で解析する。

いま、境界面上の圧力変動 p_0 を周波数 ω をもち位相速度 U_c で下流に伝播される“攪乱波”と考え、^{*)} また浸透層の厚さを h_p として、次の境界条件を仮定する。すなわち、

$$p = R_e \{ \sqrt{2} \tilde{p}_0' \exp i(kx + \omega t) \} \equiv p_0 \quad (y=0 \text{ のとき}) \quad (8 \cdot 14)$$

$$q_y = 0 \quad (y = -h_p \text{ のとき}) \quad (8 \cdot 15)$$

ここで $R_e \{ \}$ は複素数の実部を表わし、 $\tilde{p}_0' (\equiv \sqrt{2} p_0')$ は i. m. s. 値、また $k (\equiv -\omega/U_c)$ は波数である。式 (8・14) と (8・15) の境界条件で式 (8・11) 及び (8・12) を解くと容易に次式が得られる ($-h_p \leq y \leq 0$)。*)

$$p = R_e \left\{ \frac{\sqrt{2} \tilde{p}_0' \cosh \beta(h_p + y)}{\cosh(\beta h_p)} \exp i(kx + \omega t) \right\} \quad (8 \cdot 16)$$

$$q_x = R_e \left\{ -i \frac{nk}{(\alpha_1 + i\omega)} \cdot \frac{\sqrt{2}(\tilde{p}_0'/\rho) \cosh \beta(h_p + y)}{\cosh(\beta h_p)} \times \exp i(kx + \omega t) \right\} \quad (8 \cdot 17)$$

$$q_y = R_e \left\{ -\frac{nk^2}{(\alpha_1 + i\omega)\beta} \cdot \frac{\sqrt{2}(\tilde{p}_0'/\rho) \sinh \beta(h_p + y)}{\cosh(\beta h_p)} \times \exp i(kx + \omega t) \right\} \quad (8 \cdot 18)$$

ここで、 $\beta^2 \equiv k^2(\alpha_2 + i\omega)/(\alpha_1 + i\omega)$ である。

さて、式 (8・17) の $\{ \}$ の複素数を \tilde{q}_x 、その複素共役を \tilde{q}_x^* と表わせば、

$$\overline{q_x^2} = \frac{1}{2} [\tilde{q}_x \tilde{q}_x^* + R_e \{ \tilde{q}_x^2 \}] = \frac{1}{2} \overline{\tilde{q}_x \tilde{q}_x^*}$$

であるから容易に乱れ強度を求めることができる。本研究は境界面近くの浸透流の乱れに着目しているから $0 \sim |y| \ll h_p$ として h_p が十分大きいとすれば次の近似式が得られる。

$$\overline{q_x^2} = \frac{n^2 k^2}{(\alpha_1^2 + \omega^2)} (\tilde{p}_0'/\rho)^2 \quad (8 \cdot 19)$$

$$\overline{q_y^2} = \frac{n^2 k^2}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \omega^2)(\alpha_2^2 + \omega^2)}} (\tilde{p}_0'/\rho)^2 \quad (8 \cdot 20)$$

式 (8・19) 及び (8・20) を Chu ら (1972) も著者とは異なる境界条件を与えて導いている。⁵⁾ 境界面上の主流の圧力変動強度 \tilde{p}_0' がわかれば、境界面近傍の浸透流の乱れ

強度が上式から評価され、主流によって誘起された乱れが推定できる。しかし、これらの乱れ強度はあくまでも周波数 ω 、波数 k をもつ1つの圧力変動攪乱 (1つの攪乱渦) が誘起する寄与分であり、実際はすべてのスケールの攪乱の寄与を受けて実在の乱れ強度が生じる。したがって、これを解析するにはスペクトル関数の導入が必要となり、その手法はすでに第1編で論じられた。

いま、 (k, ω) と $(k+d\omega, \omega+d\omega)$ との間の波数及び周波数空間にある主流の圧力変動攪乱成分がもつ強度 (パワー) を $p_0'^2 \Phi_p(k, \omega) dk d\omega$ とおく。 $\Phi_p(k, \omega)$ は両側無限の正規化された (two-side normalized) スペクトル関数であり、 p_0' は境界面での全圧力変動強度を表わす。すなわち、定義により $\tilde{p}_0'^2(k, \omega) = p_0'^2 \Phi_p(k, \omega)$ であり、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_p(k, \omega) dk d\omega = 1 \quad (8 \cdot 21)$$

このとき、境界面近くの浸透流の実在の乱れ強度を q_x' 及び q_y' とすれば次式を得る。

$$q_x'^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \overline{q_x^2} dk d\omega = \frac{n^2}{\rho^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0'^2 k^2}{\alpha_1^2 + \omega^2} \times \Phi_p(k, \omega) dk d\omega \quad (8 \cdot 22)$$

$$q_y'^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \overline{q_y^2} dk d\omega = \frac{n^2}{\rho^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0'^2 k^2}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \omega^2)(\alpha_2^2 + \omega^2)}} \Phi_p(k, \omega) dk d\omega \quad (8 \cdot 23)$$

また、 q_x 、 q_y の正規化されたスペクトル関数をそれぞれ Φ_x 、 Φ_y とおけば次のようになる。

$$\Phi_x(k, \omega) = \left(\frac{p_0'}{\rho q_x'} \right)^2 \frac{n^2 k^2}{\alpha_1^2 + \omega^2} \Phi_p(k, \omega) \quad (8 \cdot 24)$$

$$\Phi_y(k, \omega) = \left(\frac{p_0'}{\rho q_y'} \right)^2 \frac{n^2 k^2}{\sqrt{(\alpha_1^2 + \omega^2)(\alpha_2^2 + \omega^2)}} \times \Phi_p(k, \omega) \quad (8 \cdot 25)$$

したがって、 $\Phi_p(k, \omega)$ が既知であれば浸透流の乱れのスペクトルは容易に求まる。しかし、浸透粗面上のスペクトル関数 Φ_p を直接求めることは容易でなく、ここでは滑面管路流に関する Corcos (1964)¹⁰⁾ 及び粗・滑面境界層流に関する Willmarth ら (1962)¹¹⁾ の圧力変動解析結果から Φ_p を推定することにする。もちろん、以下で評価される Φ_p の関数形はあくまでも滑面上の壁面乱れの圧力変動から推定されるものであり、必ずしも浸透粗面上のものと一致するとは考えられないが、 Φ_p が正規化されていることを考えると、近似的には以下の議論が許されるであろう。

*) あるいは「攪乱渦」と考えてもよい。この場合 U_c なる速度で下流に移流されることになる。

さて、Corcos は圧力変動の時空間相関解析を行い、乱れの相似性を仮定して次式を導いた。¹⁰⁾

$$\Phi_p(k, \omega) = \frac{U_c}{|\omega|} \phi(\omega) E_0(\mu+1) \quad \dots\dots\dots (8.26)$$

$$E_0(\mu+1) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(t) \cos t(\mu+1) dt \quad \dots\dots\dots (8.27)$$

ここで、 $t \equiv \omega \xi / U_c$ 、 $\mu \equiv k U_c / \omega$ であって ξ は波数 k に対応する空間相関のずらし距離である。また、 $A(t)$ はクロス・スペクトル関数 $\Gamma(\xi, \omega)$ の振幅比を表わすものであって、 $|\Gamma(\xi, \omega)| / \phi(\omega)$ で定義される。¹⁰⁾ 式(8.26)は圧力変動の自己相関関数をフーリエ変換したスペクトル $\phi(\omega)$ と、時空間相関の最大値が距離 ξ によって減衰する度合 $E_0(\mu+1)$ との積で表現されたものである。当然、Taylor の凍結乱流の仮定が厳密に成立すれば、時空間相関の最大値は減衰しないから $A(t) \equiv 1$ であり、このとき式(8.26)及び(8.27)から

$$\Phi_p(k, \omega) = \phi(\omega) \delta(1 + \omega/k U_c)$$

ここで、 $\delta(\omega)$ はデルタ関数である。

あるいは

$$\Phi_p(-\omega/U_c, \omega) = \phi(\omega) \quad \dots\dots\dots (8.28)$$

すなわち、時空間スペクトル Φ_p は自己相関スペクトル $\phi(\omega)$ と一致し、攪乱は完全にコヒーレンスに $U_c = -\omega/k$ で移流されることになる。

いま、圧力変動の積分スケール \mathfrak{L} を導入し、乱流解析でよく行われるように、自己相関関数が指数関数で近似的に表わされるものと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-|\tau|/\mathfrak{L}) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{\mathfrak{L}}{\pi(1+\mathfrak{L}^2\omega^2)} \quad \dots\dots\dots (8.29) \end{aligned}$$

次に、 $E_0(\mu+1)$ は式(8.27)によって $A(t)$ がわかれば計算できる。Fig. 8・5 は、Willmarth ら及び Corcos の実験結果を示したものである。実験値の適合関数として式(8.29)と同様にまず、

$$A(t) = e^{-b_1 t} \quad (b_1 \text{ は実験定数}) \quad \dots\dots\dots (8.30)$$

が考えられ、

$$E_0(\mu+1) = \frac{1}{\pi} \frac{b_1}{b_1^2 + (\mu+1)^2} \quad \dots\dots\dots (8.31)$$

となるが、式(8.31)を使って式(8.22)及び(8.23)からそれぞれ q'_x 、 q'_y を求めようとすると、高波数成分がききすぎてこれらの積分は発散する。この原因は $t = \omega \xi / U_c$ が微小のとき、式(8.30)で表現され得ないことを意味し、速度相関を式(8.30)のような指数関数で近似すれば、乱れエネルギー逸散率が発散してしまうといった困難さと同

じである(式(4.47)を参照)。

t が微小のとき、式(8.28)で示した Taylor の仮説が成立するから、 $A'(0) = 0$ の条件を満足する式(8.30)に近い適合関数として次式が考えられる。

$$A(t) = \frac{1}{1+(b_2 t)^2} \quad (b_2 \text{ は実験定数}) \quad \dots\dots\dots (8.32)$$

このとき、

$$E_0(\mu+1) = \frac{1}{2b_2} \exp\left(-\frac{1}{b_2} |\mu+1|\right) \quad \dots\dots\dots (8.33)$$

したがって、式(8.26)、(8.29)及び(8.33)からスペクトル関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi_p(k, \omega) &= \frac{U_c \mathfrak{L}}{2\pi b_2 |\omega| (1+\mathfrak{L}^2\omega^2)} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{b_2} \left|\frac{U_c k}{\omega} + 1\right|\right) \quad \dots\dots\dots (8.34) \end{aligned}$$

当然、式(8.34)は式(8.21)の正規化条件を満足する。これを用いて式(8.22)及び(8.23)から q'_x 及び q'_y を求めると次式を得る。

$$q'^2_x = n^2 \left(\frac{\rho_0'}{\rho}\right)^2 \frac{2b_2^2 + 1}{U_c^2} \cdot \frac{1}{\alpha_1' + 1} \quad \dots\dots\dots (8.35)$$

$$\begin{aligned} q'^2_y &= n^2 \left(\frac{\rho_0'}{\rho}\right)^2 \frac{2b_2^2 + 1}{U_c^2} \frac{2\alpha_1'}{\pi(\alpha_1'^2 - 1)} \\ &\times [K_1 + (e^2 - 1)K_3] \quad \dots\dots\dots (8.36) \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha_1' \equiv \alpha_1 \mathfrak{L}$ 、 $\alpha_2' \equiv \alpha_2 \mathfrak{L}$ であり、 $\alpha_1' > 1$ としている。 $\alpha_1' < 1$ のときも類似な式が求められる。また、 K_1 および K_3 はそれぞれ Legendre-Jacobi の第1種及び第3種完全楕円積分であって次式で定義される。

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ K_3 &= \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - e^2) \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ e^2 &= \alpha_1'^2 / (\alpha_1'^2 - 1) > 0, \quad k^2 = 1 - \alpha_2' / \alpha_1' > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{q'_y}{q'_x} = \left\{ \frac{2}{\pi} \frac{\alpha_1'}{\alpha_1' - 1} [K_1 + (e^2 - 1)K_3] \right\}^{1/2} \quad \dots\dots\dots (8.37)$$

式(8.37)は式(8.31)を使っても式(8.22)及び(8.23)を有限に抑えるように高波数成分切断を行えば導かれる。

浸透層の特性値である α_1 及び α_2 が決定されると数表によって K_1 、 K_3 が求まるから、乱れの異方性の程度 q'_y/q'_x は主流の水理条件とは無関係に決められることになる。

Fig. 8・6 に $r \equiv \alpha_2/\alpha_1$ をパラメータとして q'_y/q'_x の変化を示した。一般に、 r は1に近く、 α_1' はそれほど大きくないから異方性の程度は小さいが、壁面乱流では $w' > v'$ が成

立することを考えれば、浸透層内で $q'_y > q'_x$ となることはむしろ注目に値する。この差異は、 q_x が q_y に比べてポーラス粗度により一層抑制されやすいと考えられ（壁面乱流では当然、 v の方が壁面の拘束を受けやすい）、また本研究の浸透流モデル式(8・5)からもこのことは推測できる。実際、式(8・12)と(8・13)とを比較すれば、壁面乱流場での圧力変動の起因力として $\partial v / \partial x$ が重要であるのに対し、浸透流場では $\partial q_x / \partial x$ となっており、両者の差異が乱れ強度の異方性に反映しているものと推測される。

最後に、圧力及び速度の周波数スペクトル関数 $\tilde{\phi}(\omega)$ を求めれば ($\omega \geq 0$ の one-side spectrum とする) 、

$$\tilde{\phi}_p(\omega) \equiv 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_p(k, \omega) dk = 2\phi(\omega) \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 38)$$

同様に

$$\tilde{\phi}_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\Im \omega'^2 (\alpha_1' + 1)}{(\omega'^2 + \alpha_1'^2)(\omega'^2 + 1)} \quad \dots (8 \cdot 39)$$

ここで、 $\omega' = \Im \omega$ である。

式(8・38)及び(8・39)を Fig. 8・7 に図示した。式(8・38)はいわゆる Dryden の式(4・47)となる。圧力変動によって誘起、共振される浸透流の変動スペクトル $\tilde{\phi}_x(\omega)$ は $\omega' = \sqrt{\alpha_1'}$ で最大値をとることがわかる。 α_1' が増大する、すなわち浸透層が密になるに従って $\tilde{\phi}_x(\omega)$ の最大共振点は高周波成分へと移行し、低周波擾乱はポーラス粗度によって急速に減衰するものと考えられる。

8・2・3 浸透流乱れによる誘導応力

空気流と自由水面との動的相互作用の結果として風波が発生するが、Miles (1957) は風波の位相速度と空気流とが一致するいわゆる臨界領域でのエネルギー輸送がこの原因と考えて、風波の発生理論を展開した³⁾。また、Lighthill (1962) はこの理論に物理的な解釈を行い、風波の速度で移動する座標系では Fig. 8・8 (a) に示す“Cat's eye”形の流線が観察されると論じた。¹²⁾

一方、Phillips (1967) は、この Miles の理論を拡張してせん断流での Reynolds 応力の維持機構を説明した。⁴⁾ すなわち、大きなスケールの 2 次元擾乱が主流方向に対して α なる角度で U_c で伝播するとき、ちょうど $U(y_m) \cos \alpha = U_c$ なる y_m の位置で Miles のいう臨界領域 (Phillips は風波の機構と区別するためにこの領域を“matched layer”とよんだ) が発生し、主にこの領域のみで渦度 $\partial u / \partial y$ と y 方向の擾乱 u とが強く相関づけられて Reynolds 応力が誘導されると仮定した。この Phillips の理論を足掛りとして、

Fig. 8・2 で示した主流と浸透流との動的相互作用を考察し、その結果生じる誘導応力を推定してみる。

まず、平均流として主流の渦度 $\partial U / \partial y$ を、 y 方向の擾乱として浸透流の q_y をとり、これらは Phillips が仮定した

ように matched layer 内では強く相関づけられているすなわち強い動的相互作用が存在していると仮定する。このとき、主流と浸透流との動的相互作用は主に両者間の境界面で起きている (Fig. 8・1 参照)、すなわちこの境界面が matched layer に相当する。浸透流の擾乱 q_y は式(8・18)に示すように主流の圧力変動と同じ速度、すなわち U_c で下流に移流されるから、

$$U(y=0) \equiv U_0 = U_c \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 40)$$

を満足する擾乱 (k, ω) が matched layer を構成して誘導応力に寄与すると考えられる。

このとき、 U_c で下流に動く座標系では Fig. 8・8 (b) のようになり、Lighthill の“cat's eye”がこの境界面で存在するものと推測される。

この移動座標では、擾乱波は単に波数 k によって決まり、 k の擾乱 q_y が主流と動的相互作用を演ずる結果生じる誘導応力 $d\tau_t$ は、Phillips によれば次式で与えられる。⁴⁾

$$d\tau_t = A_m \rho \left\{ \frac{-d^2 U / dy^2}{k dU / dy} - \overline{q_y^2} \right\}_{y=0} dk d\omega \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 41)$$

ここで A_m は比例定数であって Miles 理論では π にあたる。

したがって、式(8・23)を使って全擾乱波の寄与を計算すれば誘導応力が評価できる。matched layer は $y=0$ であるから式(8・40)から

$$\omega = -k U_0, \quad \text{及び} \quad d\omega = -k (dU / dy)_{y=0} dy \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 42)$$

であり、式(8・41)と(8・42)から次式が得られる。

$$\frac{d\tau_t}{dy} = \mu_e \frac{d^2 U}{dy^2} \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 43)$$

ここで、

$$\mu_e \equiv \int_{-\infty}^{\infty} A_m \rho \overline{q_y^2} dk \quad \dots\dots\dots (8 \cdot 44)$$

μ_e は Phillips がいうように渦動粘性に相当し、 y と無関係と仮定すれば式(8・43)は Boussinesq 型のせん断応力表現となることがわかる。

さて、式(8・23)を用いて式(8・43)を積分すれば、次式が得られる。

$$\frac{\tau_t}{\rho} = \frac{A_m n^2 I \Im}{2\pi b_2 U_0^2} \left(\frac{p_0'}{\rho} \right)^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} \quad \dots\dots (8 \cdot 45)$$

式(8・32)の代りに式(8・30)を使えば、式(8・45)の分母の $2b_2$ が単に πb_1 と変わるだけである。また、ここで、

$$I \equiv \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(\alpha_1'^2 + t)(\alpha_2'^2 + t)(1+t)}}$$

であって次のように容易に積分される。

(I) $\alpha_1' \geq \alpha_2' > 1$ ($1 > \alpha_1' > \alpha_2'$ のときは下段の複号をとる)

$$I = \pm \frac{2}{\sqrt{\beta_1 \beta_2}} \ln \left\{ \frac{\alpha_1' \sqrt{\pm \beta_2} + \alpha_2' \sqrt{\pm \beta_1}}{\sqrt{\pm \beta_1} + \sqrt{\pm \beta_2}} \right\}$$

(II) $\alpha_1' > 1 > \alpha_2'$

$$I = \frac{2}{\sqrt{-\beta_1 \beta_2}} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'} \sqrt{-\frac{\beta_2}{\beta_1}} \right) - \tan^{-1} \sqrt{-\frac{\beta_2}{\beta_1}} \right\}$$

(III) $\alpha_1' \geq \alpha_2' = 1$ ($1 = \alpha_1' \geq \alpha_2'$ のときは α_1' と α_2' とを交換すればよい)

$$I = 2/(\alpha_1' + 1) \quad \dots \dots \dots (8.46)$$

ここで、

$$\beta_1 \equiv \alpha_1'^2 - 1, \quad \beta_2 \equiv \alpha_2'^2 - 1$$

Fig. 8・9は、 r ($\equiv \alpha_2'/\alpha_1'$) をパラメータとする α_1' と I との関係を示したものであり、直角双曲線的な変化を描いている。 $r = (1 + CR_K)/(1 + 2CR_K)$ であるから、浸透流の非線形の程度を表わす係数 C が増加すれば、 I も増加を示し、非線形な浸透流ほど大きな誘導応力を発生せしめるものと思われる。また、 α_1' が2倍に増大すればすなわち透水係数 K がほぼ半分になれば、 I もほぼ半分に減少する。つまり、透水係数が大きい浸透層ほど主流と浸透流との動的相互作用はより活発になって、より大きな誘導応力を生じさせる結果となり、このことは実際現象からも推測されるところである。

さて、主流の平均流速勾配は、速度欠損則である次の対数則分布から評価される。

$$\frac{U - U_{\max}}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y + \delta}{h + \delta} \right) \quad \dots \dots \dots (8.47)$$

ここで、 δ は実測の平均流速を式(8.47)の対数関係で適合させるように選ばれる実験定数であり、“displacement height”に相当する(第2・5節参照)。²⁾ 式(8.47)が $y=0$ まで適用可能とすれば、次のようになる。

$$(dU/dy)_{y=0} = U_* / \kappa \delta \quad \dots \dots \dots (8.48)$$

次に、WillmarthやCorcosなどによる多くの実験的研究あるいは式(4.34)から、壁面上の圧力変動強度 p_0' は壁面せん断応力 τ_0 に比例することが明らかにされている。すなわち、

$$p_0' = a \tau_0 \quad \dots \dots \dots (8.49)$$

ここで、比例定数 a は、壁面の種類及び R_e に依存する(式

(4.34)から $a \equiv G(R_e, k_s^+)$ である)。

最後に、タイム・スケール Σ は $U_c \Sigma$ がほぼ主流の平均渦径に相当するから、 $\Sigma \sim 0.4 h/U_0$ と近似できる。^{*)}

以上の仮定が妥当ならば、式(8.45)から誘導応力が次のように評価できる。

$$\frac{\tau_z}{\tau_0} \approx \frac{0.4 a^2}{\pi(2b_2)} \cdot A_m \cdot \left(\frac{\pi^2 I}{\kappa \xi_0} \right) \left(\frac{U_*}{U_0} \right)^3 \quad \dots \dots (4.50)$$

ここで、 $\xi_0 = \delta/h$ である。

式(8.50)には多くの実験定数が含まれており、これらの正確な値がわからなければ、信頼に足る誘導応力を評価できない。

まず、 b_1 あるいは b_2 は Fig. 8・5から求められる。実験値と適合関数式(8.30)や(8.32)との一致はかなり良好であるが、式(8.30)の方が若干よい。この両者の比較から、 $b_1 = 0.12$ 及び $b_2 = 0.16$ が得られるが、式(8.50)に現われる係数はそれぞれ $\pi b_1 = 0.38$ 及び $2b_2 = 0.32$ となり、これらはそれほど大差ない。

次に、Fig. 8・10には、Corcosによる滑面管路流で得られた a と R_e との関係を示すが、¹⁰⁾ R_e が増大すれば a の値は単調に減少してほぼ2に収束する。Willmarthらの実験結果でもこれと同程度の値が得られているが、粗面乱流での a は滑面での値より(1.2~1.4)倍大きいようである。¹¹⁾ 本実験で用いられる浸透粗度はWillmarthらのものより大きく、上述の結果を使うにはさらに検討を要するが、仮に a の値を滑面での値の1.4倍とし、Fig. 8・10にその推定値を併示した。

以上の a 、 b_1 あるいは b_2 が既知となれば、式(8.50)の A_m を除き他の値は主流及び浸透流の流速特性の実測から評価されるから、誘導応力の推定式(8.50)の妥当性を検証できる。換言すれば、この乱流場での A_m が求められ、Phillipsの予測値と比較検討すれば、浸透層面付近の乱流場へのPhillips理論の適用性の是非が論じられる。

第8・3節 誘導応力に関する実験的考察

8・3・1 実験装置及び実験方法

Fig. 8・11に示すように、長さ15 m、幅50 cmの勾配可変型の直線水路(Fig. 4・1の実験水路)の上流端より3 mの位置から下流の水路床に直径1.25 cmの一様粒径のガラス・ビーズを敷きつめ、浸透層を構成した。上流端から下流(8.5~9.5 m)を測定対象区間とし、その下流1 mの区間は浸透層上面を薄いブリキ板(C)(上面は砂粒粗度を付着した粗面)で覆い、主流と浸透流とを分離して、それぞれ四角堰及び流量マスで流量を計測した。

*) ポーラス乱流での平均渦径 L_x は明らかにされていないが、粗面乱流での値に準ずると考えられるから、Fig. 4・31より $L_x/h \approx 0.6 \sqrt{\epsilon}$ である。主流の平均渦径は $L_x/h \equiv \int_0^1 L_x/h d\xi \approx 0.4$ で代表してよいから $U_c \Sigma \sim L_x \sim 0.4 h$ と近似した。

測定区間をはさむ約 3 m 間の水路床の中央にほぼ等間隔に 17 個の圧力タップを設け、マノメーターに連通した。そして、流量を与えて所定の等流水深が得られるように水路勾配を調節するとともに、塩ビ管に取り付けられたバルブ(B)を調節して主流と平行な浸透流すなわち式(8・7)が満足されるようにした。また、水面高と河床面圧力とを比較検討して、上記の条件をほぼ満足することを確かめた。

浸透層として、次の 2 種類を対象とした。まず、ガラス・ビーズを路床に一層だけ完全に稠密にゴムのりで接着し、浸透流がほぼ存在しない粗面乱流場を作って、ポーラス乱流場の参照実験とした(ケース D であり、第 1 編の Table 4・1(C)のケース D-1 はこのグループでの実験例である。*) 次に、ケース D と同じ配列で粗度粒子を 3 層積み上げて、浸透層厚 h_p を約 3.4 cm とし、密な(dense)浸透層を作った(ケース E と呼ぶ)。最後に、ケース E の粗度配列と相似であるが、粗度粒子同志の間隔を拡げてこれよりゆるい(loose)浸透層を作った(ケース F と呼ぶ)。ケース F では粗度粒子を 5 層積み上げて、ケース E とほぼ同じ浸透層厚とした。

8・3・2 浸透流の平均流特性

まず、浸透層の間隙率 n は、粗度粒子の数密度から容易にケース E 及び F でそれぞれ 0.39 及び 0.54 と求められた。

次に、浸透流速 q_m とマノメータで測定された動水勾配 I_e との関係を図示したのが Fig. 8・12 である。式(8・7)が実測値に最もよく一致するように透水係数 K 及び非線形定数 C が決定され、これらの値を用いた式(8・7)が実線で図に併示されているが、実測値との一致は極めてよい。なお、各ケースで得られた浸透流の特性値は Table 8・1 に示される。

また、Arbhabhirama ら(1973)に倣って、⁹⁾ Darcy-Weisbach 型の摩擦損失係数 f に相当する浸透層の摩擦損失係数 f_K を次式で定義すれば、式(8・7)は次式となる。すなわち、

$$I_e \equiv f_K \cdot (2/\sqrt{K}) \cdot (q_m^2/2g)$$

とおけば、

$$f_K = R_K^{-1} + C \quad \dots\dots\dots (8\cdot51)$$

Fig. 8・13 に R_K と f_K との関係を図示した。層流域では式(8・8)すなわち $f_K = R_K^{-1}$ (Darcy 則)が成立し、乱流域では式(8・9)すなわち $f_K = C$ となるから、粗面乱流での Stanton 図表と類似な変化特性を示している。そして、本実験の範囲は式(8・51)が成立する遷移流域に相当している。

*) 粗面乱流でもポーラス乱流と比較するため $y=0$ をビーズの頂部にとった (Fig. 8・4 参照)。

8・3・3 主流の平均流特性

浸透層境界面で発生する誘導応力の効果のみを検討するには、 R_e 及び F_r を一定とした水理条件を与えなければならない。本研究では、各ケースにつき 3 通りの異なる水理条件で実験を行った(実験番号 1~3)。Table 8・2 に示すように、各実験番号(Run)ごとに R_e 及び F_r はほぼ一定であるから、主流には主に浸透流の効果のみが現われるものと期待できる。

さて、浸透流の効果である誘導応力は不浸透床上の壁面せん断応力に比べて室内実験規模程度ではわずかであると予想されるから、せん断応力すなわち摩擦速度は合理的かつ正確に評価されねばならない。

摩擦速度の決定法は 4・3・1 で論じたが、対数則から評価する方法では、ポーラス乱流での Karman 定数 κ が既知でなければならず、不浸透床上の $\kappa = 0.4$ を無条件に用いることはできない。実際、Chu ら(1973)は浸透層上の円管気流の流速分布をピトー管で計測し、圧力勾配から求めた U_* を使って式(8・47)の対数則を適用した結果、 $\kappa = 0.27$ を得た。⁵⁾

一方、Reynolds 応力の分布から評価する方法は運動方程式からの理論的裏付けがあり、当然ポーラス乱流場にも適用できるから、ここでは最も合理的方法として採用した。すなわち、第 1 編での実験と同様に、2 成分の熱膜流速計を用いて Reynolds 応力 $-\overline{uv}$ を実測し、 U_* を評価した。

Fig. 8・14 は、Reynolds 応力の実測値を示した一例であり、他の実験でも同様な結果が得られた。壁面近傍では粗度の局所的な影響を受け、また 4・4・2 で指摘したように熱膜流速計自体の精度も劣るから、実験値のばらつきは若干大きい。しかし壁面から離れた主流の主要部では、実験値と式(4・20)とはよく一致し、この U_* の直接評価法はかなり合理的であると考えられる。この評価法に基づいて系統的に U_* を算出した結果を Table 8・2 に示す。

次に、熱膜流速計から得られた平均流速の実測値をこれらの U_* で無次元化し、式(8・47)の速度欠損則で表わした結果の一例を Fig. 8・15 に示した。同様に、他の実験条件でも式(8・47)と実測値とは良好な一致を示し、 $y=0$ として評価される U_0 の値は妥当なものと考えられる。

Table 8・2 に総括した平均流速の対数則分布表示で特に興味ある点は、壁面がルーズな状態になるに従って Karman 定数 κ は減少するという傾向である。せん断乱流場の Karman 定数が外的条件によって変化することはよく知られ、例えば浮遊砂を含んだ流れ、¹³⁾ 壁面からの流出入(transpiration)を伴う流れ、¹⁴⁾ あるいはルーズな浸透層上の流れ⁵⁾などで観察されている。Ippen(1971)は、Karman 定数は壁面近傍の境界条件によって左右される、すなわち壁面近傍で乱れの運動量交換が活発なほど Karman 定数は減少し、逆に運動量交換が抑えられると増加することを指摘している。¹³⁾ もともと Karman 定数 κ は混合距離 ℓ

に比例し、また平均渦径 L_x にも比例するから、運動量交換が活発になるほど混合距離や平均渦径は小さくなるものと推測され、このことは第1編で論じた粗面乱流場でも例外ではなかった。

したがって、種々のせん断乱流場の乱れの挙動とともに、Karman 定数の変化を統一的に説明し得る物理モデルの開発が今後必要であると考ええる。

8・3・4 誘導応力の実験的検証

誘導応力 τ_t は次の方法によって推定できる。すなわち、浸透流が無視できるケースDの場合には、誘導応力は零であり、粗面乱流の壁面せん断応力 τ_0' のみが現われている。次に、ケースE及びFの場合には、浸透流の効果が十分期待できるから、それらの壁面せん断応力 τ_0 の中には誘導応力 τ_t の寄与分も含まれ、すなわち全壁面せん断応力 τ_0 は粗面乱流(主流)による応力 τ_0' と浸透流による誘導応力 τ_t との和によって表わされるものと考えられる。

このとき、

$$\frac{\tau_t}{\tau_0} = \frac{\tau_0 - \tau_0'}{\tau_0} = \frac{U_*'^2 - U_*^2}{U_*^2} \dots\dots\dots (8\cdot52)$$

式(8・52)から評価される誘導応力の実験値をTable 8・3に示す。ケースEの場合は全応力のほぼ5～7%、よりルーズな壁面であるケースFでは12～14%となった。以上の実験値と誘導応力の推定式(8・50)とを比較することによって、Phillips の理論が浸透層上の乱流場での主流と浸透流との動的相互作用の説明に適用できるか否かを検討してみる。

Table 8・3 に、 b_1 や b_2 を使って式(8・50)から計算された A_m の値が示される。各実験ケースで得られた A_m は若干ばらつくが、ほぼ一定であり、その平均値は $A_m = 0.15$ (b_1 から)及び 0.13 (b_2 から)となった。一方、Phillips (1967) は、Townsend による噴流の実験値から、約5%のばらつき幅をもつが平均して $A_m = 0.12$ と評価し、この理論を他のせん断乱流場へ適用しても同程度の値が期待できるものと予測した。

したがって、著者の実験範囲に関する限り、Phillips の予測は浸透層上の乱流場においても妥当であると判断できる。換言すれば Phillips の理論を適用して主流と浸透流との動的相互作用を説明しようとした本研究の意図はある程度達成されたものといえる。しかし、誘導応力の推定式(8・50)にはいくつかの仮定や実験定数を含んでいるから、浸透層粒径を一定にした本実験の結果だけから誘導応力に関する普遍的な結論を下すことは早計であって、今後さらに多くの実験的検証を重ねるとともに、式(8・50)の誘導仮定の妥当性を検討することが必要である。

第8・4節 結 言

本章は、壁面からの流出入を伴わない開水路浸透層上の2次元乱流場を対象として、その主流と浸透流との動的相互作用を考察し、その際生じる誘導応力を推定しようとしたものである。すなわち、浸透層上の主流の圧力変動によって誘起された境界面近傍の浸透流の攪乱は、そのフィード・バックとして主流に付加的な応力すなわち誘導応力を発生させるものと考え、Phillips の理論を適用してこの応力を評価する式を導いた。そして、誘導応力の実験値と推定値との比較検討の結果、定数 A_m は Phillips が Townsend の噴流実験の結果から予測した値に良好に一致し、この乱流場の主流と浸透流との動的フィード・バック機構に Phillips の理論を適用し得ることを確かめた。

本研究では最も単純な浸透層を対象としたが、近年の複雑多岐化した水工設計上の要請から、例えば水草や植生のある開水路流(自然河川や農業用水路に多い)、各種の河床保護工周辺の流れや相対粗度が極端に大きな山地河川の流れ等では主流と浸透流との動的な相互作用はより活発と考えられるから、これらの乱流機構を解明する意義は極めて大きい。また、ルーズな境界面をもつ乱流場、すなわち移動河床上の流れに対してもこの理論を発展させ得よう。

気流と自由水面との動的相互作用の結果、風波が発生する。一方、水流とルーズな砂面との動的相互作用の結果、河床波が発生すると考えられるが、前者に比べてその物理機構には不明な点が多い。

このように、本研究よりさらに複雑な河床境界面をもつ流れの物理機構を主流の乱れ挙動と河床との動的相互作用の面から解明することは容易でないが、その重要性に鑑み、今後精力的な研究を進める必要がある。

第8章 参考文献

- 1) Lovera, F. & Kennedy, J. F. Friction-factors for flat-bed flows in sand channels, Proc. of ASCE, HY-4, pp.1227-1234, 1969.
- 2) Monin, A. S. & Yaglom, A. M. Statistical fluid mechanics, MIT Press, vol.1, pp.257-327, 1971.
- 3) Miles, J. W. On the generation of surface waves by shear flows, J. Fluid Mech., vol.3, pp.185-204, 1957.
- 4) Phillips, O. M. The maintenance of Reynolds stress in turbulent shear flow, J. Fluid Mech., vol.27, pp.131-144, 1967.
- 5) Chu, Y. & Gelhar, L. W. Turbulent pipe flow with granular permeable boundaries, Ralph M. Parsons Lab., MIT, Report No.148, 1972.
- 6) 中川博次, 礪津家久: 透水性開水路乱流場における主流と浸透流との相互作用, 土木学会論文報告集, 第244号, pp.81-90, 1975.

- 7) Ward, J. C. : Turbulent flow in porous media, Proc. of ASCE, HY-5, pp.1-12, 1964.
- 8) 武内等：浸透層内の流れに関する水理学的研究，京都大学学位論文，1970.
- 9) Arbhahirama, A. & Dinoy, A. A. : Friction factors and Reynolds number in porous media flow, Proc. of ASCE, HY-6, pp.901-911, 1973.
- 10) Corcos, G. M. : The structure of turbulent pressure field in boundary layer flows, J. Fluid Mech., vol. 18, pp.353-378, 1964.
- 11) Willmarth, W. W. & Wooldridge, C. E. Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer, J. Fluid Mech., vol. 14, pp.187-210, 1962.
- 12) Lighthill, M. J. : Physical interpretation of the mathematics theory of wave generation by wind, J. Fluid Mech., vol.14, pp.385-398, 1962.
- 13) Ippen, A. T. A new look at sedimentation in turbulent streams, Jour. of BSCE, vol.58, pp.131-163, 1971.
- 14) Tennekes, H. : Similarity laws for turbulent layers with suction or injection, J. Fluid Mech., vol.21, pp.689-703, 1965.

第9章 壁面からの流出入を伴う開水路流の乱流構造に関する研究

第9・1節 緒 言

壁面を通して流体の吹出し (injection) や逆に吸込み (suction) を行って壁面上の乱流を好ましい姿に制御しようとする工学的な要請が、主として戦後航空工学や化学工学の分野で高まった。すなわち、航空機翼での剝離防止方法として吸込みが、一方、高温な流れからの壁面の保護方法として吹出しがそれぞれ有効であることが認識され、これらの分野で境界層流や管路流に及ぼす流出入の影響に関する研究が発展して来た。前者では壁面摩擦係数 (friction-factor)、後者では熱質量輸送 (heat-mass transfer) がそれぞれ主な研究課題であり、本研究は特に前者との関連が密接であるから、以下でその発展を概観する。

まず、1950年代は不十分な実験装置ながら実験データの入手とその予測式の確立に費やされた。すなわち、Rubesin (1954)¹⁾、Dorranceら (1954)²⁾、Clarkeら (1955)³⁾、Blackら (1958)⁴⁾等は Prandtl の混合距離理論を適用し、吹出しや吸込みがある場合の壁法則として二乗対数則 (bilogarithmic law) を提案し、実験値とのほぼ良好な一致を得た。

1960年代の研究は二乗対数則を踏襲しつつもさらに発展し、Stevenson (1964) は速度欠損則の確立に努め⁵⁾、Tennekes (1965) は壁法則と速度欠損則との結合を相似則から論じようと試みた⁶⁾。

1960年代後半からは Stanford 大学の Kaysらのグループによる一連の実験が注目される。すなわち、Simpsonら (1969) は吹出し・吸込み率を流下方向に変化させた影響を⁷⁾、Julienら (1971) は圧力勾配が存在する場合の影響をそれぞれ検討した⁸⁾。そして最近ようやく Andersenら (1975) によって乱れ強度分布等が計測されるに至った⁹⁾。

一方、吹出しや吸込みを伴う開水路乱流の特性に関する研究は、著者の知る限りほとんどない*)。後述するように吹出しを行えば乱れは活発化し、逆に吸込みでは減衰するから、適当な壁面流出入を与えることによって乱れの発生を、広義には流れを制御できるはずである。先述のように航空工学や化学工学の分野ではすでに一部実用に供されている現状を考えれば、水工学の分野でもこの種の流れの制御法の確立とその応用をはかることは極めて意義深いこと

といえる。

以上述べた必要性に鑑み、著者らは開水路乱流の制御法を研究する糸口を模索して来たが¹¹⁾、壁面からの吹出しや吸込みを伴う乱流場はその速度 v_0 と U_* の二重の特性速度スケール系を構成するから、厳密な相似則換言すれば普遍表示を行えず¹²⁾ 第1編で確立した不浸透床上的乱流特性に関する解析手法を多少とも拡張した近似的な取扱いを余儀なくされて来た。さらに、実験装置や計測方法も試行・改良を重ねられたものであり、なお改善すべき点も多い。

以上の点から、ここでは特別な理論的手法を提示するのではなく、境界層流に関する従来の知見から判断して、わずかな吹出し・吸込みによっても乱流構造が顕著に変化すると期待されるから、この乱流特性を実験的に明らかにしようとするものである。開水路流に関するこの種の研究がほとんど見られない現状を考慮して、特に平均流特性の解明¹³⁾に重点を置き、乱れ特性の考察¹⁴⁾は今後の課題としてあまり詳細に論じないこととする。

第9・2節 壁面からの流出入の影響に関する理論的考察

9・2・1 透水性滑面上の開水路乱流の基礎方程式

第1編と同様に、十分に発達した定常な2次元乱流を対象とするが、基礎的特性を知る目的で①水理学的滑面である② v_0 は河床面に垂直で、流下方向に一樣な強さをもち、主流速に比べて微小である③擬似等流であるという普遍性を失わずに最も単純化された流れを考える。

このとき、 $y=0$ で $V=v_0$ という境界条件で式(2・1)及び(2・2)を解けばよい。まず、連続式から、

$$V = v_0 - \int_0^y \left(\partial U / \partial x \right) dy \cdots \cdots \cdots (9 \cdot 1)$$

となり、式(2・4)の静水圧分布が近似的に成立するから、式(2・1)と(9・1)から次のせん断応力分布式が得られる。

$$\tau / \rho = (U_*^2 - g I_c y) + v_0 U + \psi(y) \cdots (9 \cdot 2)$$

ここで

$$\psi(y) \equiv \int_0^y \partial U^2 / \partial x dy - U \int_0^y \partial U / \partial x dy$$

式(9・2)は式(2・5)に対応する式であり、右辺の第2項及び第3項が壁面からの流出入 (transpiration) に伴う補正項

*) Oldenzienら (1974) は限界掃流力に及ぼす transpiration の影響に関して多分最初の実験を行ったが、¹⁰⁾ 十分な結果は得られていない。

となる。これらの補正項を評価するには平均流速分布が既知でなければならず、十分に発達した乱流であることから、相似仮定すなわち $U/U_{\max} = \tau(\xi)/\alpha$ の位置にはよらないと仮定する。この仮定は移流項 $\Psi(y)$ が無視できない従来の境界層流（平衡境界層）でも許され¹⁵⁾ $v_0 \neq 0$ の境界層流でも妥当であることが示されている¹⁶⁾ したがって、 $\Psi(y)$ の影響が境界層流より顕著でない開水路流でもこの相似解は良好に適用され、次式が成立する。

$$\Psi(\xi) = h \frac{dU_{\max}}{dx} \left\{ 2U_{\max} \int_0^{\xi} \eta^2 d\xi - U \int_0^{\xi} \eta d\xi \right\} \quad (9.3)$$

自由水面 $\xi \equiv y/h = 1$ では $V = (dh/dx)U_{\max}$ であり、式(9.1)から

$$U_{\max} \frac{dh}{dx} = v_0 - h \frac{dU_{\max}}{dx} \int_0^1 \eta d\xi \quad (9.4)$$

また、 $\xi = 1$ は境界層端に相当するからポテンシャル流、すなわち次の Bernoulli の式が近似的に成立すると考えられる。

$$U_{\max} \frac{dh}{dx} = -\frac{U_{\max}^2}{g} \frac{dU_{\max}}{dx} \quad (9.5)$$

以上から次式が得られる。

$$\frac{dU_{\max}}{dx} = \frac{v_0}{\alpha h}, \quad \frac{dh}{dx} = -\frac{v_0 F_{\max}^2}{\alpha U_{\max}} \quad (9.6)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = U_*^2 (1 - \xi) + v_0 (U - \xi U_{\max}) - \frac{v_0 U_{\max}}{\alpha} \Psi_1(\xi) \quad (9.7)$$

$$\text{ここで、} \Psi_1(\xi) = \xi \left(2 \int_0^{\xi} \eta^2 d\xi - \int_0^1 \eta d\xi \right) - \left(2 \int_0^{\xi} \eta^2 d\xi - \eta \int_0^{\xi} \eta d\xi \right), \quad \alpha \equiv \int_0^1 \eta d\xi - F_{\max}^2, \quad F_{\max} \equiv$$

$$U_{\max}/\sqrt{gh} \text{ であり、} F_{\max} \equiv F_r, \quad \int_0^1 \eta d\xi \approx 1 \quad (1/7$$

乗則分布では $7/8$) であるから、 $\alpha \approx 1 - F_r^2$ と近似できる。

式(9.6)から、 $F_r < 1$ すなわち常流のとき、吹出し ($v_0 > 0$) で $dh/dx < 0$ すなわち低下背水、吸込み ($v_0 < 0$) でせき上げ背水となり、射流のときはこれと逆であって、 $F_r = 1$ で $\alpha = 0$ すなわち限界流となる。

さて、 η に $1/\alpha$ 乗則を適用すれば、

$\Psi_1(\xi) = (49/72) \xi (1 - \xi^{2/7}) \leq \Psi_1(\xi = 0.41) = 0.063$ であるから、 F_r が小さい流れでは式(9.7)の右辺第3項を近似的に無視してよい。すなわち、

$$\tau/\rho \approx U_*^2 (1 - \xi) + v_0 (U - \xi U_{\max}) \quad (9.8)$$

また、 $\Psi(\xi = 1) \approx (49/72 \alpha) v_0 U_{\max}$ 、 $I_e = S - dh/dx = S + (v_0/\alpha)(U_{\max}/gh)$ であるから、式(9.2)より

$$U_*^2 = g I_e h - v_0 U_{\max} (1 + 49/72 \alpha) \\ = ghS - v_0 U_{\max} (1 - 23/72 \alpha) \quad (9.9)$$

したがって、常流では（正確には $\alpha \geq (23/72)$ すなわち $F_r \leq 0.83$ ）、主流条件が同一でも、吹出しによって摩擦速度 U_* は減少し、極端な場合には $U_* = 0$ すなわち剥離現象が生じるものと予測される。一方、吸込みによって摩擦速度は増加し、壁面近傍での速度勾配は増加することを示唆している。

なお、通常 $v_0/U_{\max} \ll 1$ で、かつ F_r が1より十分小さい場合は、式(9.6)から $dh/dx \approx 0$ となり、擬似等流と見なしてよい。^{*} このように、主流方向の変化が微小で $\partial/\partial x \approx 0$ なる大胆な近似が許されるならば、

$$V \approx v_0 \quad (9.10)$$

$$U_*^2 \approx gSh - v_0 U_{\max} \quad (9.11)$$

となる。

9.2.2 壁面からの流入を伴う壁法則

先述のように、壁面領域に v_0 が特性速度スケールとして新たに加わるから、壁法則は

$$U^+ \equiv U/U_* = F(y^+, v_0^+), \quad v_0^+ \equiv v_0/U_* \quad (9.12)$$

となる。関数 F の理論的決定には、第2.4節と同様な乱れエネルギーの収支関係に立脚した考察が妥当であると考えられるが、乱れの基本特性量もほとんど不明で、その普遍表示の妥当性も明確でないところから、以下に述べる古典的な手法に頼らざるを得ない。すなわち、Prandtl の混合距離理論を適用すると、 $\xi \ll 1$ に対して式(9.8)より次式が得られる。

$$-\overline{uv} = U_*^2 + v_0 U - \nu \frac{dU}{dy} \equiv \ell^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \quad (9.13)$$

これより平均速度勾配は次式で与えられる。

$$\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{2(v_0^+ U^+ + 1)}{1 + \sqrt{1 + 4\ell^{+2}(v_0^+ U^+ + 1)}} \quad (9.14)$$

^{*} 通常の実験では $|v_0^+| < 0.1$ 、 $U_{\max}^+ = (20 \sim 30)$ 、 $F_r < 0.5$ であるから $|dh/dx| < 10^{-3}$ となる。したがって、河床勾配が微小なときは厳密な等流解析は許されない。

$v_0^+ = 0$ の不浸透床では式 (9・14) は当然式 (2・12) に一致する。さて、 $v_0^+ \neq 0$ の場合の混合距離 ℓ^+ に関する知見はなく、 $|v_0^+|$ が小さいときは不浸透床上のものに近しいと考えられるから、従来の式 (2・13) で近似する。

以上から、 v_0^+ をパラメータとして式 (9・14) を解けば F の関数形が定まるが、この解析解は得られず数値積分によらねばならない。しかし、第 2・4 節で指摘したように、対数則分布に対応するような実用価値の高い簡単な関数形をまず求めておくべきであろう。

さて、buffer 層以上の高さでは粘性の効果が無視でき、式 (2・13) は $\ell^+ = \kappa_0 y^+ \gg 1$ となるから式 (9・14) より次の近似解が得られる。

$$\phi \equiv \frac{2}{v_0^+} (\sqrt{v_0^+ U^+ + 1} - 1) = \frac{1}{\kappa_0} \ln y^+ + D(v_0^+) \quad (9 \cdot 15)$$

ここで、 $D(v_0^+)$ は積分定数である。

式 (9・15) は、Dorrance ら (1954) によって最初に導かれた壁法則 (二乗対数則) であり²⁾ その後多くの研究者がこの式の妥当性を境界層流で実験的に検証し、係数 κ_0 及び D は v_0^+ に無関係な普遍定数であろうと報告している^{5), 17)}。開水路流でも、上述のように v_0 の存在によって混合距離 ℓ が変らないと仮定すれば、 κ_0 は普遍定数である。また、 D が普遍定数である保証はないが、 $|v_0^+|$ が 0.1 程度内の小さい値ではほぼ定数と見なしうる。したがって、式 (9・15) は $v_0^+ \rightarrow 0$ で式 (2・14) に一致しなければならないから、従来の Nikuradse の値を採用し、当面 $\kappa_0 = 0.4$ 及び $D = 5.5$ とする。^{*} そして、この妥当性は次節で実験的に検証される。

本研究でも式 (9・15) を壁法則として採用するが、式の形が若干複雑である。いま、式 (9・15) を変形すれば次式が得られる。

$$U^+ = \kappa^{-1} \ln y^+ + B \quad (9 \cdot 16)$$

ここで、

$$\begin{cases} \kappa \equiv (1 + C v_0^+)^{-1} \kappa_0, & B \equiv D \left(1 + \frac{D}{4} v_0^+\right) \\ C \equiv \frac{D}{2} + \frac{1}{4 \kappa_0} \ln y^+ \end{cases} \quad (9 \cdot 17)$$

係数 C は y^+ の関数であるが、もしこの変化が小さく、ほぼ定数と近似できれば、 v_0^+ の効果を係数 κ 及び B のみに含めることができ、式 (9・16) は従来の対数則とまったく同

形となる。すなわち、第 1 編で得られた成果を $v_0^+ \neq 0$ の場合にまで拡張でき、実用価値は高くなるであろう。以下ではこの近似の妥当性を検討する。

後述するように、壁面から流出入を与えてもなお十分に発達した乱流状態が近似的に維持されて、式 (9・15) が成立する $|v_0^+|$ の範囲は約 0.1 以下と考えられるから、まず v_0^+ をパラメータとして式 (9・15) を Fig. 9・1 に片対数表示した。injection 率 v_0^+ が増加すると流速分布 U^+ は次第に急勾配となり、逆に suction 率 $|v_0^+|$ が増加するとその勾配は次第に緩やかとなり、凸形を示して最大値をもつようになる。しかし、通常の実験の R_* は 10^3 程度であるから、流れの主流部 ($30 < y^+ < 10^3$) ではこれらの曲線群は直線で近似できると考えられる。実際、Fig. 9・1 に妥当な近似直線群が引かれ、見かけ上の Karman 定数 κ 及び切片定数 B が求められた¹³⁾。その結果、 C の値は v_0^+ が大きいほど減少する傾向にあるが、ほぼ一定値の 9.2 をとり、また B は v_0^+ との直線関係で良好に近似できた。すなわち、 $30 < y^+ < 10^3$ 、 $-0.1 < v_0^+ < 0.15$ で

$$\kappa = \kappa_0 (1 + C v_0^+)^{-1}, \quad (\kappa_0 = 0.4, \quad C = 9.2) \quad (9 \cdot 18)$$

$$B = 5.5 (1 - 5.5 v_0^+) \quad (9 \cdot 19)$$

以上のように、近似式 (9・16) は適用範囲に限られるとはいえ、 $v_0^+ = 0$ での汎用の対数則分布をそのまま $v_0^+ \neq 0$ の場合に拡張したものであり、乱流特性を理解する上では式 (9・15) より優れているといえる。

9・2・3 速度欠損則及び粘性底層内の流速分布 速度欠損則は、

$$U_{\max}^+ - U^+ = G(\xi, v_0^+) \quad (9 \cdot 20)$$

で示されるが、現段階では G の関数形を第 1 編のように乱れエネルギーの収支関係から決定することはできない。しかし、第 2・4 節で指摘したように対数則分布がほぼ満足に水面まで適用できることから、 v_0 がある場合にも乱流状態が維持されている限り式 (9・15) をほぼ水面まで適用できるものと考えられる。このとき、

$$\begin{aligned} & \frac{2}{v_0^+} (\sqrt{v_0^+ U_{\max}^+ + 1} - \sqrt{v_0^+ U^+ + 1}) \\ &= -\frac{1}{\kappa_0} \ln \xi \end{aligned} \quad (9 \cdot 21)$$

となるが、前節と同様に慣用の対数則の形に変形する。すなわち、式 (9・16) から、

$$U_{\max}^+ - U^+ = -\frac{1}{\kappa} \ln \xi, \quad \kappa = \kappa_0 (1 + C v_0^+)^{-1} \quad (9 \cdot 22)$$

^{*} Simpson ら (1969) は、transpiration によっても粘性底層厚 δ_s^+ は変化しないと仮定し、 $U^+ = y^+ = \delta_s^+ = 11$ (2・2・1 参照) を境界条件として与えた⁷⁾。このとき $D = (2/v_0^+) (\sqrt{11 v_0^+ + 1} - 1) - \kappa_0^{-1} \ln 11$ となり、 D は普遍定数でなくなるが、後述するように彼らの仮定は妥当ではない。

が得られ、見かけ上の Karman 定数 κ を v_0^+ によって変化させればよい。

一方、Mickley ら (1965) は、Clauser の floating モデル、すなわち速度欠損則が成立する外部領域 (自由水面領域) は複雑な領域である内部領域 (壁面領域) の上にあたかも浮き、両者の相互作用は小さいというモデルを考慮に入れて、両者の境界でのせん断応力を特性スケールとして新たに用いれば、形式上不浸透床上的速度欠損則をそのまま適用できるものと推測した¹⁸⁾。injection のとき、この境界付近で Reynolds 応力が最大値 $\sqrt{\tau_m}/\rho \equiv (U_*)_m$ をとることから、これを特性スケールとして採用し、

$$\frac{U_{\max} - U}{(U_*)_m} = -\frac{1}{\kappa_0} \ln \xi \quad \dots\dots\dots (9 \cdot 23)$$

が良好に成立することを実験的に示した。もちろん、この Mickley らの方法は injection のときにしか適用できないが、式 (9 \cdot 22) との比較から、

$$(U_*)_m / U_* = 1 + C v_0^+ \quad \dots\dots\dots (9 \cdot 24)$$

であり、式 (9 \cdot 22) は式 (9 \cdot 23) を拡張したものとなっており、このときの Reynolds 応力の最大値は式 (9 \cdot 24) で与えられる。

次に、粘性底層内の流速分布に関して考察する。不浸透床の場合と同様に、Reynolds 応力は無視でき、式 (9 \cdot 10) から式 (2 \cdot 1) は次のようになる。

$$v_0 \frac{\partial U}{\partial y} = g I_e + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (9 \cdot 25)$$

上式は容易に積分でき、 $g h I_e = U_*^2 + v_0 U_{\max}$ という近似を用いて簡単化すると次式が得られる。

$$U^+ = \frac{1}{v_0^+} \left\{ \exp(v_0^+ y^+) - 1 \right\} - \left(\frac{U_{\max}^+}{R_*} + \frac{1}{R_* v_0^+} \right) \\ \times \left\{ \frac{1}{v_0^+} \left\{ \exp(v_0^+ y^+) - 1 \right\} - y^+ \right\} \quad \dots\dots\dots (9 \cdot 26)$$

上式の第 2 項は重力流である開水路流に特有な補正項であるが、そのオーダーは y^{+2}/R_* であるから、 R_* が十分大きくかつ壁面近傍では第 1 項に比べて無視できる。また、 $v_0^+ \rightarrow 0$ で $U^+ = y^+$ となり、不浸透床の場合に一致する。

Fig. 9 \cdot 1 に式 (9 \cdot 26) の主要項、すなわち第 1 項のみの結果を図示した。式 (9 \cdot 15) と (9 \cdot 26) との交点を粘性底層厚 δ_s^+ とすれば、injection が強いほど底層厚は薄くなり、逆に suction では厚くなることがわかる。これは底層内への吹出しが大きくなれば、底層端で運動量の交換がより激しくなり、乱流域が増加して粘性域 (擬似乱流域) が減少するためと考えられ、極端に injection が大きくな

ば、いわゆる剝離現象が生じ、粘性底層は消滅するものと予想される。逆に suction が大きくなると、壁面近傍の乱れ発生源すなわち bursting 現象に伴う coherent な運動が吸い込まれ、運動量の交換が抑制されて乱流域は後退し、粘性域が増大して行くものと予想される。そして極端に suction 率が大きくなれば、次節で述べる再層流化現象が生じて十分に発達した乱流状態をもちや維持できなくなるであろう。

ところで、第 1 編で論じたように、実在の流れには式 (9 \cdot 15) と式 (9 \cdot 26) を結合する buffer 層が存在し、Fig. 9 \cdot 1 に見られる屈曲点は生じない。第 2 \cdot 4 節での知見に基づけば、流れの全領域に適用される流速分布は、混合距離として式 (2 \cdot 13) を用いて式 (9 \cdot 14) を数値積分すればよい。もちろん、式 (2 \cdot 13) 及び (9 \cdot 14) は論理的には自由水面領域に適用できないが、両式を同時に用いる限り、偶然自由水面領域までの平均流速分布を適正に表わすことになる (2 \cdot 4 \cdot 5 参照)。実際、式 (9 \cdot 22) の速度欠損則が妥当とされる根拠の 1 つはここにある。

さて、Fig. 9 \cdot 2 は v_0^+ を -0.2 から 0.2 まで大幅に変化させ、 $A = 27$ として式 (9 \cdot 14) を数値計算した結果である。 $v_0^+ = 0$ の曲線を中心に $v_0^+ > 0$ の injection で増加傾向、 $v_0^+ < 0$ の suction で減少傾向を示す扇形分布をなし、当然式 (9 \cdot 15) と (9 \cdot 26) とが buffer 層で滑らかに接続している。また、 $30 < y^+ < 10^3$ では式 (9 \cdot 16) の対数則近似が良好に適用されることがわかる。この数値解から求められる Karman 定数 κ は式 (9 \cdot 18) で良好に表わされ、また切片定数 B は $B = 5.5 (1 - 3.82 v_0^+)$ で与えられるが、 $|v_0^+|$ が小さいときは式 (9 \cdot 19) で満足に近似しうものと考えられる。換言すれば、積分定数を $D(v_0^+) \equiv 5.5$ と仮定した先述の議論が妥当であることを示している。

しかし、以上の Fig. 9 \cdot 2 に関する議論は、壁面からの流入が存在する場合にも式 (2 \cdot 13) が依然として成立する、すなわち $\kappa_0 = 0.4$ 及び $A = 27$ が前提条件であり、この妥当性はやはり実験的に検証されなければならない。

9 \cdot 2 \cdot 4 流出率 $|v_0^+|$ が大きい場合の 流れの挙動

まず、前述のように $|v_0^+|$ が大きい suction では流れはもはや乱流状態を維持できず、式 (9 \cdot 13) の混合距離理論が適用できなくなると考えられる。従来の研究者はこれを再層流化現象と呼んでいるが、 R_e は依然として十分に大きいから文字通り流れが層流に逆遷移すると解すべきでなく、十分に発達した乱流から強制的に不完全な乱流状態にされたと見るべきである。あるいは、第 6 \cdot 4 節で指摘した「擬似層流」に向かう現象と考えた方がよい。とにかく、suction が強くなり、この再層流化現象が起こればこれまでの議論は適用できない。

いま、式 (9 \cdot 15) は形式上 $y^+ = y_M^+$ で最大値 U_M^+ をと

とすれば、容易に次式が得られる。

$$y_M^+ = \exp(-D - 2/v_0^+) \kappa_0, \quad U_M^+ = -(v_0^+)^{-1} \dots \dots \dots (9.27)$$

$y^+ = y_M^+$ で式 (9.14) も零となるが、形式上 $y^+ > y_M^+$ で $U^+ = U_M^+ =$ 一定となり、式 (9.15) と矛盾する。すなわち、 $y_M^+ < R_*$ ならば $y^+ > y_M^+$ でもはや完全乱流とは考えられず、再層流化現象が起きているといえる。物理的には、平均流速勾配が零となり、Reynolds 応力の発生すなわち乱れの発生が起きない様な乱流に移行したものと考えられる。例えば、 v_0^+ が -0.08 及び -0.1 で y_M^+ はそれぞれ 2.4×10^3 及び 3.3×10^2 となり、この位置が Fig. 9.1 に併示された。通常の実験ではせいぜい $R_* \approx 10^3$ 程度であるから、 $v_0^+ \approx -0.08$ ではもはや十分に発達した乱流状態を維持できず、 $v_0^+ < -0.1$ ではほぼ全流域とも不完全な乱流 (擬似層流) に移行するものと考えられる (Fig. 9.2 参照)。あるいは見かけの Karman 定数が $\kappa \rightarrow \infty$ では物理的意味をもたないから、式 (9.18) から $v_0^+ = -C^{-1} = -0.11$ で再層流化現象が生じるといってもよい。実際、境界層流に関する多くの実験結果によれば、 v_0^+ がほぼ -0.1 に達したとき再層流化現象が起きることが示されている^{4), 6), 19)}。

次に、 v_0 が大きい injection を与えると、式 (9.9) から U_* は減少し、極端な場合は $U_* \rightarrow 0$ すなわち剥離が生じることが理解できる。当然 v_0 に比して v_0^+ の増加は大きく、Fig. 9.1 や 9.2 に見るように U^+ は非常に増大する。したがって、 v_0^+ が大きくなると特性速度スケールとしては U_* より v_0 を選ぶべきである。剥離現象が生じる $U_* \rightarrow 0$ の場合は、粘性底層の壁面近傍では式 (9.26) から次式が得られる。

$$U/U_{\max} = -\epsilon \left\{ \frac{1}{2} y^* + \frac{1}{6} y^{*2} + O(y^{*3}) \right\} \dots \dots \dots (9.28)$$

ここで、 $y^* \equiv y v_0 / \nu > 0$ は $y^+ \equiv y U_* / \nu$ に代わるべき内部パラメータである。

$y^* \gg y^+$ となって剥離が生じても式 (9.25) が有効ならば、式 (9.28) から $U < 0$ すなわち壁面のごく近傍では形式上逆流が生じる結果となる。このような現象が実際に生じるものか検討を要するが、少なくとも $U_* \rightarrow 0$ となると壁面近傍の流れは不安定となり、粘性底層は消滅するものと推測される。

さて、式 (9.13) から $U_* = 0$ において積分すれば次式が得られる。

$$2 \sqrt{\frac{U}{v_0}} = \frac{1}{\kappa_0} \ln y^* + D^*(v_0) \quad (9.29)$$

式 (9.29) は剥離が生じるときの式 (9.15) に対応する壁法則であり、実際、式 (9.15) で $U_* \rightarrow 0$ とすれば、式 (9

・29) が得られる。このとき、

$$D^*(v_0) = D(v_0^+) + 2(t_*^+ / v_0) + \kappa_0^{-1} \ln(U_* / v_0) \dots \dots \dots (9.30)$$

$D^*(v_0)$ は式 (9.29) の積分定数であるが、壁面近傍の剥離域と主流域との接続条件 (境界条件) が v_0 によって顕著に変化するから $D^*(v_0)$ は v_0 の関数となり、 $D(v_0^+)$ のように定数とはならないと考えられる。

とにかく、 v_0^+ の増加とともに流速分布は不浸透床上の対数則から式 (9.16) の対数則へ移行し、最終的には式 (9.29) の二乗対数則へ収束するものと考えられる。すなわち、 $v_0^+ \rightarrow \infty (U_* \rightarrow 0)$ となれば $U \sim (\ln y)^2$ となり、このことは Fig. 9.2 から容易に見い出される。

また、式 (9.22) に対応する速度欠損則は、式 (9.29) から

$$2 \left(\sqrt{\frac{U_{\max}}{v_0}} - \sqrt{\frac{U}{v_0}} \right) = -\frac{1}{\kappa_0} \ln \epsilon \dots \dots \dots (9.31)$$

となり、未知の定数 $D^*(v_0)$ を考慮する必要はない。

以上のように、 $|v_0^+|$ が大きすぎると、suction で再層流化現象が生じてもはや乱流状態が維持できず、一方、injection では剥離現象が生じて流れは複雑かつ不安定なものになると考えられる。したがって、不浸透床 ($v_0 = 0$) の乱流特性との比較によって吹出し・吸込みの影響を明らかにしようとする本章の目的からは、 $|v_0^+|$ が過度に大きくない場合を対象とすべきである。換言すれば、 U_* と v_0 の二重特性速度スケール系を対象としているが、 U_* の方が特性スケールとして比重が大きく、 v_0 は単に副次パラメータとして v_0^+ にすべて集約する考えに立っている。これは、第2・5節で論じた粗面乱流、すなわち ν/U_* と k_s の二重特性長さスケール系で k_s^+ を導入することによって前者のみのスケール系に縮約しようとしたのと同じである。以上の考察から、本研究では $|v_0^+| \leq 0.1$ を対象とする。

9.2.5 流出入による壁面せん断応力の変化

前節までの議論で明らかなように、壁面せん断応力 $\tau_0 \equiv \rho U_*^2$ は流出入速度 v_0 によって著しく変化する。この現象は不浸透床 ($v_0 = 0$) 上で主流方向に圧力 p を変化させた場合の境界層流の挙動に酷似している。 $dp/dx < 0$ すなわち加速流では境界層の発達には抑えられ、壁面近くまで高速流となるから $U_*^2 = \nu \partial U / \partial y|_{y=0}$ は増大する。そして、極端に負の圧力勾配が大きければ再層流化現象が起こるようである^{20), 21)}。一方、 $dp/dx > 0$ すなわち減速流では境界層の発達は促進され、壁面せん断応力は減少して、極端な場合は周知の剥離現象が生じる。前者は急縮部で、後者は急拡部でよく観察される現象であるが、Fig.

9・2・6 乱れ特性に関する理論的考察

第1編の不浸透床上的の場合とは対照的に、本研究では流出を伴う乱流の乱れ特性を解明すべき新たな解析手法を提示するまでには至っていない。このことは研究の進んでいる境界層流に関しても例外ではなく、最近 Andersen ら (1975) によってこの乱れ特性が計測され始めたにすぎない比較的新しい研究課題である⁹⁾。しかし、この乱流の物理機構を解明するには前節までの平均流特性のみでは明らかに不十分であり、また本論文の緒論で指摘した「乱れの発生の制御」という将来の研究目標の達成にも乱れ特性の解明は不可欠である。

本研究ではその足掛りを得るための乱れ特性値の実測を行うが、それに先立って平均流特性から導かれる乱れ特性について若干の考察を試みる。

(1) Reynolds 応力分布

まず、壁面乱れの基本的特性の一つである Reynolds 応力は式 (9・8) から次式で与えられる。

$$\frac{-\overline{uv}}{U_*^2} = (1-\xi) + v_0^+ (U^+ - \xi U_{\max}^+) - \frac{dU^+}{dy^+} \quad \dots\dots\dots (9\cdot38)$$

U^+ は式 (9・14) で与えられるから、 $R_* \equiv y^+/\xi$ を与えれば、 v_0^+ をパラメータにして Reynolds 応力の分布を容易に計算できる。Fig. 9・6 は $R_* = 500$ 及び 2,000 で、 v_0^+ を -0.1 から 0.1 まで変化させたときの式 (9・38) の計算結果である。 $v_0^+ = 0.0$ は第2章での結果であり、injection ではこれとほぼ相似な形を保って増大し、逆に suction では減少して、 R_* が大きいほどこれらの増減率は大きい。すなわち、injection での Reynolds 応力発生は促進、suction での抑制がうかがえる。

しかし、Fig. 9・4 で示したように v_0^+ の変化に伴って特性スケール U_* 自体が変化するから、Reynolds 応力の増減を直接比較することは適当でない。このため、任意の R_e を与えて $\beta \equiv v_0/U_{*0}$ をパラメータとして、まず式 (9・35) から Ω を計算し、次に $R_* = \sqrt{f/2} R_e$ 、 $v_0^+ = \beta/\sqrt{\Omega}$ から式 (9・38) を計算して $-\overline{uv}/U_{*0}^2$ を求めればよい。 $R_e = 5 \times 10^4$ での $-\overline{uv}/U_{*0}^2$ を図示したのが Fig. 9・7 であり、 β を -0.1 から 0.1 まで変化させている。図から injection で Reynolds 応力 $-\overline{uv}$ は増大し、suction で減少することがわかるが、これらの特性は壁面せん断応力 $U_*^2 = (-\overline{uv} + \nu \partial U / \partial y)_{y=0}$ の特性とはまったく逆であって注目に値する。すなわち、壁面近傍では suction で Reynolds 応力の減少より粘性応力の増大が大きいために U_* は増加し、injection ではこれと逆の傾向を示した。Fig. 9・6 や 9・7 で見られるように suction ほど $-\overline{uv}$ は壁面近傍で最大値をとり、以後急減するが、injection では式 (9・24) で与えられる最大値の位置は壁面から離れ、9・2・3 で述べた floating モデルが概念的に成立して

いるものと考えられる。

さて、壁面から十分離れた主流部では粘性応力は無視でき、また $U \approx U_{\max}$ と近似してよいから、式 (9・38) は

$$-\overline{uv} \approx (1-\xi) (U_*^2 + v_0 U_{\max}) \quad (9\cdot39)$$

となって、図に示すように確かに直線分布をなすことがわかる。ただ、強い suction で不完全乱流となった場合には直線分布を示す領域は限られる。いま、主流部での Reynolds 応力 $-\overline{uv}$ の増減率を $r \equiv -\overline{uv}/(-\overline{uv})_0$ と定義すれば 9・2・5 より

$$r \equiv \Omega + \phi = \Omega + \beta (2.5 + \sqrt{2/f_0}) \quad (9\cdot40)$$

となり、Fig. 9・8 にこの関係を示した。上述のように、Fig. 9・4 の壁面せん断応力比 Ω とは反対に、 r は injection で増大し、suction で減少して、当然 Fig. 9・7 から予測される値に近くなる。^{*} 概略的な特性は $\beta \approx -0.1$ ($v_0^+ \approx -0.07$) でほぼ零となり、主流部の Reynolds 応力の発生はほとんど抑えられて不完全乱流に移行するが、一方 $\beta \approx 0.1$ ($v_0^+ \approx 0.18$) では約 3 となり Reynolds 応力の発生は促進される。

なお、 R_e が十分大きいとき、 $C_{f_0} \rightarrow 0$ の極限として式 (9・32) から $\Omega' \equiv (1 - \phi/4)^2$ が得られ、

$$r \approx \phi + (1 - \phi/4)^2 \quad \dots\dots\dots (9\cdot41)$$

となる。 $R_e = 8 \times 10^5$ での上式を Fig. 9・8 に併示したが、式 (9・40) との一致はかなり良好であり、境界層流に関する Kinney の近似式 (9・32) を開水路流にも実用上使うことができる。

(2) 乱れエネルギーの収支関係

乱れエネルギーの発生率 p は

$$\frac{Ph}{U_*^3} = R_* \left(\frac{-\overline{uv}}{U_*^2} \right) \left(\frac{dU^+}{dy^+} \right) \quad \dots\dots (9\cdot42)$$

であるから、式 (9・14) と (9・38) から容易に計算できる。 v_0^+ をパラメータにした普遍表示には式 (9・42) で十分であるが、 v_0^+ による p の変化の絶対量を検討するためには、 U_{*0} で無次元化する必要がある。 $-\overline{uv}$ の変換と同様に、 $R_e = 5 \times 10^4$ のときの Ph/U_{*0}^3 を ξ に対して図示したものが Fig. 9・9 である。

壁面近傍を除く主流部の乱れ発生率は injection で系統的に増大し、suction で減少する。これらの増減率は Fig. 9・7 の Reynolds 応力の場合より大きく ($|\beta| = 0.1$ で約 4 倍増減する)、平均流速勾配 dU^+/dy^+ の相乗効果が現われている。一方、壁面のごく近傍では逆に suction

^{*} 先述のように、Fig. 9・1 と 9・2 とは $|v_0^+|$ が大きくなると若干差異を示すから、 $|\beta|$ が大きいとき式 (9・40) の r は Fig. 9・7 から得られる値と若干異なる。

が強いほど P_h/U_{*0}^3 が大きくなっており、これは粘性応力が次第に Reynolds 応力を上まわり、両者の積である乱れ発生率の増大をもたらすためである。すなわち、injection では Reynolds 応力が、suction では粘性応力がそれぞれ増大するために、乱れ発生率の最大値は $v_0 = 0$ の不浸透床の場合と比べて共に増加するという注目すべき結果が得られた。もちろんこの最大位置は suction ほど粘性応力の効く壁面近傍側に移行する。換言すれば、injection のある乱流は Reynolds 応力に、suction は粘性応力にそれぞれ依存性が強く、この意味で前者は乱れ促進効果（剝離化）、後者は乱れ抑制効果（再層流化）をもつものと考えられ、このことはすでに予測されたところである。

さて、乱れエネルギー式は式(2・27)と同様にして式(2・20)から

$$P = \epsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{q^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) v - \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{2} \right) \right\} + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^2}{2} \right) \quad \dots (9.43)$$

となり、新たに移流項が加わる。この移流項はたかだか $v_0 \partial/\partial y (q^2/2)$ であり、壁面近傍を除けば無視できるものと考えられる。したがって、 R_* が十分大きいときは式(9.43)は次式となる。

$$P = \epsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{q^2}{2} (v + v_0) + \frac{p\nu}{\rho} \right\} \quad \dots (9.44)$$

すなわち、乱れエネルギーの拡散率 T_r を $T_r \equiv \overline{(v + v_0)q^2/2}$ と広義に定義すれば式(9.44)は式(2・30)とまったく一致する。

本研究では式(9.43)や(9.44)の乱れエネルギーの収支を直接検討するまでには至らないが、式(4・11)及び Fig. 4・37 から $\overline{q^2/2} U_{*0}^2 \leq 4$ 及び $\overline{q^2/2} U_{*0}^3 \leq 1$ であり、 T_r/U_{*0}^3 はたかだか $(1 + 4\beta)$ 程度であろう。injection では $(\partial q^2/\partial y) v_0 < 0$ であるから拡散率 $\partial T_r/\partial y$ は増大し、逆に suction では減少すると考えられ、 v_0 によって拡散率は複雑に変化するものと推測される。しかし第1編で明らかにされたように、壁面及び自由水面の両近傍を除き拡散率は発生率と逸散率に比べてかなり小さいから、 $|\beta| \lesssim 0.1$ の流出入に対してその中間領域では、乱れエネルギーに占める拡散エネルギーの効果を無視し、発生率 P と逸散率 ϵ とを等しいとする取扱いが許されよう。このとき、Fig. 9・9から

$$\frac{\epsilon_h}{U_{*0}^3} \approx \frac{P_h}{U_{*0}^3} \approx A(\beta) \xi^{-1} \quad \dots (9.45)$$

で表わされる ξ の-1乗則がほぼ成立し、係数 $A(\beta)$ は β の単調増加関数となる。**) 式(9.45)は injection

の方が suction の場合に比べ良好に成立し、第1編の知見から判断すれば前者の方がより完全な乱流であるといえる。

以上のように、transpiration が乱れエネルギーの収支関係に直接かつ顕著に影響を及ぼすと予想される領域は壁面近くであり、Fig. 4・39 と同様な乱れエネルギーの収支構造を詳細に検討する必要があるが、このことは次の考察からも認められる。

2・2・1と同様にして、壁面領域の乱れ発生率 $P^+ \equiv P\nu/U_{*0}^4$ 及び直接逸散率 $E^+ \equiv E\nu/U_{*0}^4$ は式(9・14)及び(9・38)から計算されるが、これを U_{*0} を用いて無次元化するために、

$$\left. \begin{aligned} P_0^+ &\equiv P\nu/U_{*0}^4 = P^+ \cdot \Omega^2 \\ E_0^+ &\equiv E\nu/U_{*0}^4 = E^+ \cdot \Omega^2 \\ y_0^+ &\equiv y U_{*0}/\nu = y^+/\sqrt{\Omega} \end{aligned} \right\} \dots (9.46)$$

と変換する。

Fig. 9・10 は、 y_0^+ に対して $E_0^+ \cdot y_0^+$ 及び $P_0^+ \cdot y_0^+$ を片対数表示した $R_* = 5 \times 10^4$ ($R_{*0} = 2,244$) での結果である。当然、各曲線で囲む面積が直接逸散量及び乱れ発生量となり、両者の和がエネルギー損失量となる(2・2・1参照)。Fig. 9・10で最も特徴的な点は、 $y_0^+ \approx 10$ を境にして直接逸散率と発生率の大きさが逆転することである。すなわち、 $y_0^+ > 10$ では injection で乱れ発生率が急激に増大し、suction で減少する。一方、直接逸散率は $y_0^+ < 10$ で顕著であり、injection で減少するが suction では急激に増加する。このように E_0^+ と P_0^+ とは互いに補完し合って全エネルギー損失量 \mathcal{E} に寄与する。 \mathcal{E} の近似評価式として式(9・8)と式(9・16)とから次式が得られる。

$$\mathcal{E} = \int_0^h (E + P) dy = U_{*0}^2 U_m + \frac{\nu_0}{2} \left\{ U_m^2 - \left(\frac{U_{*0}}{\kappa} \right)^2 \right\} \quad \dots (9.47)$$

式(9.47)は式(2・8)の拡張であり、第1項は壁面せん断応力 $\tau_0/\rho \equiv U_{*0}^2$ による損失、第2項は壁面からの流出入が存在するために生じる損失といえる。当然、suction では第1項が増加し、第2項は減少するが、injection ではこの逆となる。いま、 $v_0 = 0$ の全エネルギー損失量 \mathcal{E}_0 との比をとり、 $\zeta \equiv \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ と定義すれば次式を得る。

$$\zeta = \Omega + \frac{1}{2} \beta \sqrt{\frac{f_0}{2}} \left\{ \left(\frac{2}{f_0} \right) - \frac{\Omega}{\kappa^2} \right\} \quad \dots (9.48)$$

ここで、 $\kappa^{-1} \equiv 2.5 (1 + 9.2 \beta/\sqrt{\Omega})$

Fig. 9・8に式(9.48)の結果を併示した。 $|\beta|$ が小さい suction でわずかに $\zeta < 1$ となるが、 $|\beta| < 0.1$ の範囲の

**) 式(9・16)と式(9・39)を用いれば $A(\beta) = 2.5 \Omega^{3/2} (1 + C v_0^+) \times (1 + U_{\max}^+ v_0^+) (1 - \xi)$ となる。

流出入率では R_p にあまり関係せず、全エネルギーの損失量は $v_0 = 0$ の場合とほとんど変化しないと考えてよい。

以上のことから、injection では乱れ発生量の増加分がほぼ直接逸散量の減少で、また suction では後者の増加分がほぼ前者の減少によりそれぞれ賄われるものと考えられる。式 (2・19) から $v_0 = 0$ のとき $R_p = 5 \times 10^4$ の乱れ発生量は全エネルギー損失量の約 59 % を占めるが、injection ではこの比率が増大し、一方 suction では減少することになる。換言すれば、流れのエネルギー損失は injection を与えると乱れ変動を經由する熱変換過程が増大し、一方、suction では直接熱逸散過程が増大して、この意味でも前者が「乱れ促進剤」として、後者が「乱れ抑制剤」として効果があることがわかる。

通常、 $y_0^+ < 10$ の粘性底層内の流速計測は困難であり、 $y_0^+ > 10$ の流れの主要部を対象とする限り、直接逸散率を度外視してよく、この場合 Reynolds 応力や乱れエネルギー発生率は injection ほど増大する結果となる。第 1 編で論じた乱れの self-consistency は流出入が存在しても成り立つと考えられるから、injection を与えれば乱れ強度、乱れ逸散率、乱れ拡散率等の乱れ特性量が増大し、suction を与えれば逆に減少するであろう。このような乱流構造に関する細詳な議論は別の機会に譲りたいが、「乱れの制御法」を開発しようとする際に不可欠かつ重要な鍵を与えるものとする。

第 9・3 節 平均流特性に関する実験的考察

9・3・1 実験装置及び実験方法

前節の理論的考察の妥当性を検証し、さらに新たな知見を得る目的で、流出入を伴う開水路の乱流特性に関する実験を行った。

流れに吹出し・吸込みを与える透水性路床部は流下方向に一樣な条件を与えるために十分長く形成されることが望ましいが、実験装置の制約などから現象の本質を害さない程度に小型化するよう工夫した。不浸透床面に透水性床面を接続させる場合にも、共に水理学的滑面であり、正確に同一面を形成させれば、壁面の相異による内部境界層の発達にはほぼ無視できる。また、 v_0 を急変させた境界層流の実験によれば、少なくとも平均流特性はほとんど遷移区間なしに新たな v_0 に応答すると報告されている^{7), 22)} 第 1 編の知見から、 v_0 が存在してもなお active 成分が強いものと予測できることから、透水板をそれほど長く設置する必要はないであろう。

本実験では長さ 104 cm、幅 49 cm、厚 1.5 cm の透水板（粒径 0.65 mm のポリスチレン樹脂を熱焼結した、空隙率 35 % の滑面板）を特注し、その周辺 4 cm は薬品処理で不浸透面となっている。実験水路は不浸透床面上の乱れ計測に用いたものを Fig. 9・11 (a) のように改造し、その上流端から

約 9 m の位置に透水板を設置して、その下部には Fig. 9・11 (b) に示す小型タンクが設置された。タンクの底面に設けられた径 2.5 cm の 8 個の孔を通して給排水して v_0 を発生させ、また透水板との間にガラス玉を敷きつめて緩衝効果を図った。²³⁾

実験方法としては、まず Fig. 9・11 に示すバルブ B、D を全閉し、水路床全体を不浸透面とし、十分に発達した乱流状態の等流が得られるように水路勾配、バルブ A 及び下流可動ゲートを調節した。次に、バルブ E を全開、D を全開の状態、B、C のバルブを微調節して所定の injection 流を主流に与えた。injection 流量は JIS 規格に合致した検定済のオリフィス・メータで測定された。また suction 流はバルブ B、C を全閉し、E のバルブを微調節して重力吸水で行われ、この流量は直接流量マスで測定された。そして、一樣な v_0 が生じていることを小型タンクの周辺に取付けられた圧力タップから確認した。²³⁾

実験は Table 9・1 に示す 4 ケース（実験ケース記号は **H**）が行われた。この水理条件は基準となる $v_0 = 0$ の場合を示したものであり、第 1 編の不浸透床面上の滑面での水理条件とはほぼ合致させた。特に、**H** - 1、**H** - 4 はそれぞれ **A** - 1、**G** - 1 に対応する中心的な実験である。**H** - 1 ~ 3 は injection 及び suction を各 2 通り、**H** - 4 は各 3 通り行い、 $|\beta| = 0.03, 0.05$ 及び 0.10 を目安として透水板の有効面積 (95 cm × 41 cm) だけ乗じた流出入流量 Q_i を与えた。主流流量 Q との比 $|Q_i/Q|$ は **H** - 1、**H** - 4 でたかだか 5 % 以内であり、ほぼ擬似等流と見なされた。^{*} なお、これら一連の水理条件の詳細な資料は著者の共同研究者の一人が報告している。²³⁾

次に、計測断面は透水板の上流端から $x = 84$ cm 下流に設けられた。 $x = 50$ cm での平均流プロファイルと比較検討した結果、両者は実験誤差内で一致し、ほぼ十分に発達した流出入を伴う流れが形成されたものと考えられる。

本研究では平均流特性をまず入手することに重点をおいたから、1 成分熱膜流速計で流れ全域の流速分布を詳細に計測した。また、別に乱れ特性をほぼ同じ水理条件で 2 成分熱膜流速計を用いて計測した。すなわち、**H** - 1 では u と v 及び u と w のペアが計 10 通り、**H** - 4 では u と v のペアが計 7 通り計測された。

なお、データ解析の処理方法は第 1 編とまったく同じであり、ここではその説明を割愛する。

9・3・2 壁面せん断応力

Fig. 9・12 は実測された平均流速分布の一例である。injection で低流速域が壁面から押し上げられ、一方、

^{*} 別に $|Q_i/Q|$ が大きな **H** - 1 ~ 3 の実験を追加あるいは再実験し、9・2・4 で論じた流れの挙動が検討された。²⁴⁾ なお、実験記号は **HR** である。

suction では高流速域が壁面へ吸い寄せられた形となっており、 $\beta \equiv v_0 / U_{*0}$ が ± 0.1 以内でも明らかに流入の影響は顕著である。この図から壁面せん断応力は injection で減少、suction で増加することがわかるが、第9・2節の理論結果の妥当性を検討するためには、特性速度スケールである U_* を可能な限り正確に評価せねばならない。

U_* の評価方法については第1編の不浸透床上の流れについて詳細に論じられたが、水面勾配から求める (1) の方法は浸透床区間が短い本実験では I_e を正確に評価できないから適当ではない。したがって、対数則分布にもとづく (2) の方法または Reynolds 応力分布の直接測定による (3) の方法によらねばならない。 $v_0 = 0$ では実測の Reynolds 応力分布のみから U_* は評価されるから、(3) 方法は乱れの self-consistency に則ったものとされ、乱流構造の普遍表示に良好な結果を与えた。しかし、 $v_0 \neq 0$ では式 (9・38) から主流域でも Reynolds 応力は U^+ や U_{\max} の関数であり、 U_* を乱れの self-consistency から評価しようとする目的は達せられない。なるほど、(2) の方法は式 (9・16) の成立が大前提であるが、(3) の方法は運動方程式に則った、特別の仮定を必要としない一般的手法であって、この意味で後者の方が優れているといえる。境界層流の分野では従来ほとんど (1) の方法に対応した運動量厚 θ の変化 $d\theta/dx$ から評価されて来たが、最近、Andersen ら (1975) によって (3) の方法がこれよりはるかに優れていると指摘されたことは注目に値する⁹⁾。

しかし、Fig. 9・12 を片対数表示すれば $v_0 = 0$ の場合と同程度のばらつきで良好に直線分布するから、平均流特性の評価には (2) の方法でも妥当であろう。乱れ特性まで論及するには (3) の方法が良さそうであるが、後述するように流入が存在すると $v_0 = 0$ の場合より Reynolds 応力の実測値がばらつき、実際上の実験精度を考えると (2) と (3) の方法に優劣をつけがたい。

これらの評価法に関しては今後さらに検討を要するが、本研究では一応平均流特性の考察には (2) の方法、乱れ特性の考察には (3) の方法が用いられた。すなわち、(2) の方法では式 (9・18) から U_* が求められ、(3) の方法 (\hat{U}_* とする) では Reynolds 応力の実測値が式 (9・38) に合致するように決定された。

Fig. 9・13 は $H-1$ 及び $H-4$ に関して (2) の方法による U_* と (3) の方法による \hat{U}_* を比較したものである。suction で $\hat{U}_* > U_*$ 、injection で $U_* < \hat{U}_*$ となる傾向があり、 $|\beta|$ が大きいほど両者の差異は大きくなる。しかし、本実験では $|U_* - \hat{U}_*| / \hat{U}_* \leq 15\%$ の範囲内で両者は良好に一致し、式 (9・16) の対数則近似の妥当性が Reynolds 応力の実測結果から確認された。

次に、Fig. 9・14 は $\beta \equiv v_0 / U_{*0}$ に対して $\Omega \equiv (U_* / U_{*0})^2$ を図示した全ケースでの結果であり、各ケースにおける R_e について計算された式 (9・36) の理論曲線も併示

された。実験値と理論値との一致はかなり良好であって、前節の理論結果の妥当性を示している。

9・3・3 平均流速分布特性

Fig. 9・15 (a) 及び (b) はそれぞれ $H-1$ 及び $H-4$ の平均流速 U^+ の実測値を片対数表示したものであり、図中の曲線群は各 v_0^+ に対する式 (9・14) の計算結果である。実測値には若干ばらつきが見られるが、ほぼ理論曲線と良好に一致し、壁面からの流入を伴う乱流場にも式 (9・13) の混合距離理論が適用されることが認められる。 $H-2$ や $H-3$ でも同様に良好な一致が見られ、 $^{24)} y^+ > 30$ では $v_0^+ = 0$ の曲線を基準として injection で増大向きに suction で減少向きに開いた特徴ある扇状の分布形が得られた。したがって、本実験 ($|\beta| \leq 0.1$) に関する限り、式 (9・14) を近似した式 (9・16) の対数則はかなりの精度で成立し、 U_* を式 (9・18) で評価しても何ら矛盾は生じないものと結論できる。¹³⁾

$|\beta| > 0.1$ となる過大な流出入率の場合の式 (9・14) やその近似式 (9・16) の適用性を次に検討する必要がある。しかし、過大な suction では再層流化、過大な injection では剝離現象へと向うから、 U_* の評価自体困難となり、また特性速度スケールとしてのこの重要性もなくなる。過大な injection の場合は特性スケールとして v_0 を用いれば式 (9・29) が得られるから、この妥当性を簡単に検討する。Fig. 9・16 は $\beta \geq 0.15$ という過大な吹出しで得られた平均流速の実測値を v_0 で無次元表示したものである。²⁴⁾ 確かに β が大きいほど式 (9・29) との一致は良好であり、流れは剝離状態に近づくと考えられ、このことは Fig. 9・4 の Ω -曲線からも十分に推測される。Karman 定数 κ_0 は本実験範囲内で $\kappa_0 = 0.33$ となり、 $\beta = 0$ での $\kappa_0 = 0.4$ より小さい。すなわち、過大な吹出しでは「定義通り」の Karman 定数 κ_0 は減少し、混合距離 $\ell = \kappa_0 y$ は実質上小さくなる。このことは、 ℓ と相関があり、しかも乱流概念のより明白な平均渦径 L_x から明らかにされるから、後節で検討する。なお、切片定数 D^* は v_0 の減少関数となることが認められるが、その関数形を決定するまでには至らなかった。

次に、Fig. 9・17 は式 (9・15) の二乗対数則を検討した一例である。 ϕ の形で整理された実測値は式 (9・15) より若干小さめであるが、概ね良好な一致が認められ、他のケースについても同様な結果が得られた。²³⁾ すなわち、 $|\beta| < 0.1$ の流入を伴う乱流では ϕ 表示を行えば、不浸透床に対する $\kappa_0 = 0.4$ 及び $D = 5.5$ を与えた式 (9・15) によって良好に普遍表示される。いま、式 (9・14) を ϕ で表わせば、次式となる。

$$\frac{d\phi}{dy^+} = \frac{2(1 + v_0^+ \phi/2)}{1 + \sqrt{1 + \ell^{+2} (1 + v_0^+ \phi/2)^2}} \quad (9・49)$$

$y^+ > 10$ では $\ell^+ \gg 1$ から $d\phi/dy^+ \approx 1/\ell^+$, $y^+ < 10$ では Fig. 9・17 から $|v_0^+ \phi/2| \ll 1$ となり, 結局式 (9・49) は不浸透床の式 (2・12) に近似的に一致する。したがって, 図中の曲線は式 (2・12) 及び (2・13) から得られた $v_0 = 0$ での流速分布 U^+ であるが, これを ϕ 分布とも見なすことができ, $y^+ < 30$ の buffer 層以下の実測値が式 (9・15) からずれて粘性底層内の式 (9・26) へ遷移する特性を良好に説明している。

最後に, Tennekes (1965) が相似仮説から提案した $|v_0^+ y^+|$ にする $|v_0^+ U^+|$ の表示法の妥当性を簡単に検討する。⁶⁾ まず, Fig. 9・18 は suction の実験で得られた $|v_0^+ U^+|$ を片対数表示したものであり, 図中の曲線は式 (9・26) の主要項を示した粘性底層内の流速分布形である。壁面に近づくとき実測値はこの曲線に収束するようである。粘性底層の存在が確認される。粘性底層から離れると R_τ や F_τ によらない一定の勾配をもった直線に乗り, その切片定数は v_0^+ によってグループ分けができるようである。いま, Tennekes が $-0.1 < v_0^+ < -0.04$ の「moderate-suction」率で相似仮説から導いた次式, すなわち

$$|v_0^+ U^+| = C_1 \ln |v_0^+ y^+| + C_2 |v_0^+|, \quad (-0.1 < v_0^+ < -0.04) \quad (9・50)$$

を検討した結果, $C_1 = 0.05$ 及び $C_2 = 12$ と選べば実測値とよく一致することがわかり¹³⁾, 境界層流で得られた値にはほぼ一致した。⁶⁾ すなわち, moderate-suction 率内では式 (9・50) は式 (9・16) の対数則に良好に一致し, 後者は前者の拡張形となっていることが確認された¹³⁾。

一方, injection での Tennekes 表示に関する知見は何も得られていないようである。式 (9・16) と (9・50) との比較から, moderate-suction 率以外では C_1 及び C_2 はもはや定数でなく, 式 (9・50) は成立しないが, Fig. 9・19 に示すように injection の実験で得られた $v_0^+ U^+$ を両対数表示すれば, ほぼ直線に乗るようである。すなわち,

$$v_0^+ U^+ = C_3 (v_0^+ y^+)^n \quad (v_0^+ > 0) \quad (9・51)$$

がほぼ成立し, 本実験の範囲内では $n = 1/2$ の $1/2$ 乗則に従うものと考えられる。このとき, $C_3 = 15.7 v_0^+$ の関係が得られた。

Tennekes 表示の詳しい吟味は今後の課題ではあるが, suction と injection では明らかに平均流速の分布形式が異なり, 流出入の影響を統一的に検討する目的には前述の対数則や二乗対数則の適用の方がより優れていると考えられる。

第9・4節 乱れ特性に関する実験的考察

9・4・1 Reynolds 応力分布

第1編で指摘したように, 乱れ特性量の普遍表示には平均流特性量の評価以上に特性スケール U_* の正確な決定が不可欠である。Fig. 9・20 は, Reynolds 応力 $-\overline{uv}$ の実測値を示したものであり, 9・3・2 に述べた (3) の方法で \hat{U}_* を決定した。 $-\overline{uv}$ の実測値は壁面近傍を除いてほぼ直線分布するから, 式 (9・38) の理論曲線との一致が見い出されるが, $|v_0^+|$ が大きいときは実測値にかなりのばらつきが見られ, 両者を一致させることはかなり困難となる。図中には各実験条件に対応する式 (9・38) の理論曲線が併示されたが, 各ケースとも実測値は 9・2・6 で論じた変化特性を良好に示し, また他の研究者が得た結果ともほぼ一致し, 壁面からの流出入の影響を把握できる。^{9), 19)} ただ, $|v_0^+|$ が大きいときのばらつきは, 乱流自体が再層流化や剝離現象へと近づく特異な流れとなることや実験装置等の不備に起因するものと考えられる。特に, $|v_0^+|$ が大きくなると, 不浸透床上の流れでは無視できた流れの履歴すなわち inactive 成分がかなり下流まで効いてくるから, 平均流特性に関しては十分評価しうる実験装置でも乱れ特性の評価には不十分であり, 普遍表示が可能となる active 成分を検出するには精巧に作られた十分に長い浸透性水路が必要とされる。さらに, $|v_0^+|$ が大きくなると 2 成分熱膜流速計の方向特性の厳密性が要求されるから, この較正曲線係数の決定により正確さが必要となる。

以上のことから, $|v_0^+|$ が比較的大きな場合に本実験で得られた乱れ特性の実測値には不要な inactive 成分や実験誤差がかなり含まれていると懸念され, 十分な定量評価を下すまでには至らない。したがって, 詳細な定量評価は今後の検討課題として, 以下では本実験で得られた乱れ特性の挙動を若干考察する。

9・4・2 乱れ強度分布

まず, Fig. 9・21 は $H-1$ 及び $H-4$ に関して 1 成分熱膜流速計から得られた乱れ強度 u'/\hat{U}_* を図示した結果である。摩擦速度として \hat{U}_* を用いても乱れの self-consistency に則った普遍表示とはならず, かえって \hat{U}_* の誤差が懸念されるが, 第1編の不浸透床上での結果を拡張してとりあえず \hat{U}_* を使用した。

実験値には若干ばらつきが見られるが, $H-1$ と $H-4$ とはほぼ同じ変化特性を示し, また $H-2$ 及び $H-3$ でもほぼ同じ結果が得られた。すなわち, 本実験の範囲内では流出入が存在しても, R_τ や F_τ の影響をほとんど受けずに u'/\hat{U}_* は普遍特性分布を示すと考えられる。もっとも, $|v_0^+|$ が大きなきの実験値のばらつきは相当大きい, 系統的なばらつきではなく, ほぼ active 成分に支配された乱流と考えてよい。injection が大きくなるとともに u'/\hat{U}_*

は増大し、suctionが大きくなると減少するが、その増減率は自由水面近傍以外の主流部で大きい。すなわち、Fig. 9・12に示した平均流速と同様に、乱れ強度も injectionで非一様化に、suctionで一様化に向かうものと考えられる。これらの結果は Andersen ら (1975) によって得られた境界層流での実験値と若干異なるが、その特性はよく一致している。*)

同様に、Fig. 9・22及び9・23はそれぞれ u'/\hat{U}_* 及び w'/\hat{U}_* を示した一例であり、 u'/\hat{U}_* とほとんど同じ変化特性を示している。すなわち、流出入が存在しても乱れの self-consistency はほとんど崩れず、相似性が保たれているものと考えられる。

さて、不浸透床の上の流れでは式(4・11)の普遍関係が良好に適用された。図にはこの曲線が併示され、今回得られた $v_0^+ = 0$ の実験値と比較されている。式(4・11)が妥当とされた $y^+ \geq 50$ の壁面領域以上では ($H-1$ で $\xi = y^+/R_* \geq 0.083$, $H-4$ で $\xi \geq 0.03$ が対応する)，実験値と式(4・11)との一致は良好であり、本実験の乱れ計測は十分信頼されるといえる。

一方、流出入が存在する場合の正確な普遍関係を提案するまでには至らないが、各乱れ強度は v_0^+ の変化に伴いほぼ相似形に変化するから、式(4・11)をこの場合にも拡張できるものと考えられる。すなわち、式(4・11)の係数 D_i のみが v_0^+ の関数であるとして、次式が近似的に適用できると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u'}{U_*} &= D_1(v_0^+) \cdot e^{-\xi} \\ \frac{v'}{U_*} &= D_2(v_0^+) \cdot e^{-\xi} \\ \frac{w'}{U_*} &= D_3(v_0^+) \cdot e^{-\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9.52)$$

実測値にはほぼ合致する $D_i(v_0^+)$ を選び、Fig. 9・21～9・23に式(9.52)を併示した。実測値との一致が壁面近傍を除いて比較的良好であることから、 u' , v' 及び w' の各乱れ強度は概略的に式(9.52)で表示されるものと考えられる。このとき、係数 $D_i(v_0^+)$ と $v_0 = 0$ での値 ($D_i)_0$ ($D_1 = 2.3$, $D_2 = 1.27$ 及び $D_3 = 1.63$) との比を v_0^+ に対して図示したのが Fig. 9・24である。図から明かなように、本実験の範囲内では $D_i/(D_i)_0$ は乱れ成分の方向に関係なくほぼ次の直線で表わされる。

$$D_i/(D_i)_0 = 1 + 6 v_0^+ \dots\dots\dots (9.53)$$

式(9.53)の妥当性はさらに検討を要するが、 v_0^+ が変化しても第6章の π -型渦モデルから理論的に得られた式(4.12)が $v_0 \neq 0$ の場合にも成立することとなり、このモデルが適用可能な乱れエネルギーの平衡領域がやはり存在するものと考えられる。換言すれば、式(4.11)の前提条件が依然として成立しており、 $v_0 \neq 0$ の乱流場へこれを拡張して式(9.52)を適用しようとした上述の試みはまったく物理的根拠がないわけではない。

ところで、上述の乱れ強度の無次元表示はそれぞれの特性速度スケール \hat{U}_* が使われたためにこの普遍特性を議論するには適しているが、 v_0^+ によって \hat{U}_* 自身が変化するから流出入の影響を直接検討するには Fig. 9・7のような絶対変化の比較が必要である。Fig. 9・25は u'/U_{*0} の絶対変化を示した一例であるが、 v'/U_{*0} や w'/U_{*0} の変化もほぼこれと同じ特性を示した。粘性底層以下の議論はできないが、**) u' の最大位置以上の平衡領域では injectionほど乱れ強度は増大し、逆に suctionでは減少して一様化に向っている。しかし、 $\xi \geq 0.6$ すなわち自由水面領域では $\beta \equiv v_0/U_{*0}$ が変化しても乱れ強度はほとんど変わらないようである。すなわち、平衡領域までの乱れは injectionで促進され、逆に suctionで抑制される結果となり、壁面からの流出入によって乱れを制御できる可能性があるが、自由水面領域にはこの効果はほとんど波及しないようである。しかし、Fig. 9・9に示した乱れ発生率の計算値にはこの領域でさえ v_0^+ の影響が現われている。もっともこの絶対値は非常に小さく、また第1編で明らかにされたようにこの領域での乱流構造は逸散率や拡散率で主に支配されているから、上述のことが矛盾する結果とは考えられない。これらの詳しい議論や実験的検証は今後の検討事項であるが、粗度の影響がほぼ平衡領域の中央までしか波及しなかったことを考慮すれば、流出入の影響がやはりこの領域までにとどまるという結果はあながち不自然でない。

さて、 $\beta = 0$ では式(4.11)が適用されて、Fig. 9・25に示すように実験値と良好に一致している。また、 $\beta \neq 0$ では式(9.52)及び(9.53)から

$$u'/U_{*0} = 2.3(\sqrt{\Omega} + 6\beta) e^{-\xi} \dots\dots (9.54)$$

が得られ、 $R_e = 1.1 \times 10^4$ ($H-1$) での式(9.36)を計算し、各 β に対する式(9.54)を図に併示した。大きな suction では式(9.52)が不適当であるから論外であるが、式(9.54)は実験値と比較的良好に一致している。

*) 境界層流では開水路とは異なって、suction のとき境界層の発達を抑えられ、過度に $|v_0^+|$ が大きければ境界層厚は逆に減少し¹⁹⁾ 後者とは異なった再層流化に遷移すると考えられる。Andersen らの suction 率 ($v_0^+ = -0.083$) はこの場合に相当すると推測される。

**) u' の最大値は確かに injection ほど大きい、粘性底層内 ($y_0^+ \lesssim 10$) に入ると逆に suction の方が大きくなる傾向が見られた。これは、Fig. 9・10 から底層内では suction ほど乱れ発生率が大きくなるためと推測される。

最後に、Fig. 9・26 は相対乱れ強度 u'/U を図示した結果である。 $v_0 = 0$ では第1編の結果 (Fig. 4・8 参照) と良好に一致し、 R_ϵ の影響が顕著に現われている。Injection が強くなるとほぼ系統的に増大し、特に壁面近傍の u' は U のオーダーに近づき、剝離現象へと移行する²⁴⁾。一方、suction が強くなると u'/U は減少して一様化へ向うことがわかる。そしてこれらの流出入の影響はやはりほぼ平衡領域までであって、自由水面領域には顕著な差異は現われていない。なお、式 (9・16)、(9・52) 及び (9・53) から次式が得られる。

$$\frac{u'}{U} = \frac{(1 + 6 v_0^+) e^{-\xi}}{2.5 (1 + 9.2 v_0^+) \ln(R_\epsilon \xi) + 5.5 (1 - 5.5 v_0^+)} \quad (9・55)$$

最も大きい $|v_0^+|$ について式 (9・55) を計算し、図中に併示した。詳しい議論はできないが、式 (9・55) は $y^+ > 50$ の領域でほぼ満足に適用されうものと考えられる。

9・4・3 スペクトル分布及び特性渦スケール

スペクトル解析手法を用いて、1成分熱膜流速計から得られた速度変動のスペクトル密度関数 $S_u(k)$ が求められた。Fig. 9・27は $H=1$ を例にとり (a) $y/h \equiv 0.05$ 、(b) $y/h \equiv 0.30$ 及び (c) $y/h \equiv 0.75$ 、すなわち、壁面領域、平衡領域及び自由水面領域にそれぞれ属する代表測点でのスペクトル分布を示したものである。 $v_0 = 0$ では第4・6節の結果と同じであって、そこでの議論がそのまま適用される。

さて、スペクトル分布に及ぼす流出入の影響は壁面領域及び平衡領域には明白に現われているが、自由水面領域にはほとんど現われない。特に、壁面近傍での顕著な影響は9・2・6で理論的に予測され、また Fig. 9・25で実験的にも検証されたところである。この影響範囲内でのスペクトル分布は injection を与えると高波数側へほぼ全体的に移行し、一方 suction を与えると低波数側へと移行する。すなわち、injection では特性渦スケールは減少し、suction で増加する傾向が十分推測される。逸散スペクトル $D_u(k) \equiv k^2 S_u(k)$ を表示すればこれらの特性はより明瞭に把握でき²³⁾ 後述するようにマイクロ・スケール $\lambda_x \equiv \left(\int_0^\infty D_u(k) dk \right)^{-1/2}$ は injection ほど小さくなることがわかる。

次に、これらの特性渦スケールに及ぼす v_0^+ の影響を検討してみる。まず、Fig. 9・28 は式 (4・42) から得られるマクロ・スケール L_x で無次元化したスペクトル分布の一例である。Fig. 9・27(a) に系統的に現われた v_0^+ の影響は Fig. 9・28には見かけ上ほとんど出現せず、 $v_0 = 0$ のときの分布とほぼ一致する。 $H=1$ の場合と同様に、第2・3節で得られた $R_L = 500$ の理論曲線とほぼ良好に

一致している^{*)}。換言すれば、流出入の影響はマクロ・スケール L_x にも現われ、スペクトル分布をこの L_x で規準化すればほとんど普遍特性化してしまう、すなわち v_0^+ の影響は現われず、第1編で確立された多くの手法がほとんどそのまま適用できると考えられる。

さて、Fig. 9・29 は上述の式から評価されたマクロ・スケール L_x 及びマイクロ・スケール λ_x をそれぞれ図示した結果である。両渦スケール共に、 $v_0 = 0$ では第1編で得られた結果とほぼ一致し、injection になるとこれから系統的に減少し、一方 suction になると増加するようである。この v_0^+ の影響は壁面近傍ほど顕著であり、 $\xi > 0.6$ の自由水面領域ではほとんど消滅する。 ξ に対する λ_x の変化は L_x より緩慢であるから (Fig. 4・34 参照)、強い suction のときはほぼ一様化するようである。すなわち、強い suction でマイクロ・スケールほど一様化指向は強いと推測される。一方、強い injection での壁面近傍 (buffer 層以下) では L_x と λ_x との隔たりは小さくなるが、これは R_L が減少するために式 (4・53) から十分予測される結果である。

以上のように、特性渦スケールが injection で減少し、suction で増加する現象は、前者では壁面近傍の小さな渦が浮上させられる、一方後者では壁面から離れた大きな渦が吸い寄せられるためにそれぞれ起こるものと解釈できる。現象論的にいえば、buffer 層以上の主流域で injection ほど渦スケールは非一様化に向かい、諸量の分布の勾配は急になって乱れは促進されよう。一方 suction での渦スケールは一様化に向い、せん断乱流の特性を次第に失って乱れは抑制されるものと考えられる。

9・4・4 乱れエネルギーの逸散率

Fig. 9・27に見られるように、 $v_0 \neq 0$ のスペクトル分布にも $1/3$ 乗則が成立する慣性小領域の存在が確認されたから、第1編で確立された手法を用いて乱れエネルギーの逸散率 ϵ が評価できる。すなわち、2・3・3の(B)「給水管」法から ϵ が評価され、 $H=1$ 及び $H=4$ で得られたこの実験値が U_{*0} で無次元化されて Fig. 9・30 に示された^{**)}。今回得られた $v_0 = 0$ の実験値は Fig. 4・35で示された第1編での結果や式 (4・56) から計算される理論曲線とほぼ良好に一致する。なお、自由水面領域で後者が若干小さくなるのは L_x の近似表現の粗雑さのためである。

*) v_0 の変化による L_x と u' の増減は逆であるから $R_L \equiv L_x u' / \nu$ の変化を厳密に考慮する必要はない。また $H=1$ は第1編の $A=1$ に対応する低速流グループであり、 L_x の修正もほとんど必要ない。

**) $H=1$ の buffer 層以下では R_L が小さくなり、(B) 法の適用に疑問が持たれる。したがって、詳しい検討は今後に残される。

さて、 $v_0 \neq 0$ の逸散率は injection では系統的に増加し、suction で減少するが、これらの v_0^+ の影響は平衡領域までに顕著に現われている。この変化特性は Fig. 9・25 の乱れ強度や Fig. 9・29 の特性渦スケール等のそれと類似しており、注目に値する。

本研究では乱れエネルギーの収支関係を論ずるまでには至らないが、逸散率 ϵ の実験値は Fig. 9・9 に示された発生率 P の理論値とほぼ対応づけて考察することができる。すなわち、壁面近傍側に乱れエネルギーの過剰領域が、自由水面側に不足領域がそれぞれ存在し、両領域間に $P \approx \epsilon$ なる動的平衡状態が存在すると確認できる。しかし、この P の理論値はあくまでも式 (9・14) の混合距離理論を前提としており、suction が大きくなって不完全乱流に近づいた場合や自由水面近傍では実際現象と異なるものと考えられ、特に、suction が大きい場合の Fig. 9・9 と 9・30 との顕著な差異はこのことに基因しているものといえる。

以上要するに、流れに injection を与えると乱れ発生率が増加し、それに伴い乱れ逸散率も増加する。一方、suction を与えると両者は共に減少する。そして壁面からの流入が及ぼす以上の乱流構造の変化はほぼ平衡領域域までに現われると結論してよい。

第9・5節 結 言

本章は河床境界面を通しての水流の出入り(transpiration)が開水路流の乱流構造に及ぼす影響を及ぼすかを理論的かつ実験的に考察したものである。従来開水路乱流に関するこの種の研究が行われていない現状に鑑みて、まず平均流特性を詳細に検討し、次に乱れ特性の基本的考察に努めた。第1編で得られた不浸透床上の乱流構造に関する成果に基づいて、一様な流入の影響に関して物理的な一貫性のある考察を行い、興味ある多くの知見が得られた。

本章で得られた主な結果を列挙すれば次の通りである。

1) 流入の速度が摩擦速度の1割以内でも乱流構造に顕著な影響が現われる。すなわち、injection (吹出し) では壁面近くの低流速域が押し上げられて諸々の特性量は非一様化する挙動を、suction (吸込み) では壁面上層の高流速域が吸い寄せられて一様化する挙動をそれぞれ示す。

2) したがって、壁面せん断応力は injection を与えれば減少し、極端な場合剝離現象を起こす。一方、suction を与えれば増加して、極端な場合再層流化現象を起こす。

3) 両極端に移行しない通常の流出率 ($|v_0^+| < 0.1$) では混合距離理論が適用できて、二乗対数則が導かれる。しかし、 $v_0^+ = 0$ の場合の知見を適用するには、対数則近似の方が実用価値があり、その妥当性は実験的にも十分検証された。

4) 粘性底層以上の Reynolds 応力は injection で増加し、suction で減少して主流域ではほぼ直線分布を示す。

一方、底層内の粘性応力はこの Reynolds 応力の増減と逆であって、両者から評価される直接逸散率及び乱れ発生率は底層端を境として逆転した変化特性を示す。すなわち、全エネルギー損失量はほとんど不変であるが、injection では乱れを経由する熱逸散量が増加し、suction では直接熱に変換される逸散量が増加して乱流構造が顕著に変化するものと示唆される。

5) 摩擦速度で無次元化された乱れ強度はほぼ普遍特性分布を示し、第1編で確立された普遍関数を近似的に拡張して適用することができる。すなわち、流入人が存在してもなお乱れの active 成分は強く、乱流構造は相似的に変化し、換言すれば self-consistency が良好に成立しているものと考えられる。

6) 乱れ強度や乱れ逸散率の絶対変化は injection で系統的に増加し、suction では減少して一様化に向う。流入人の影響はほぼ平衡領域域までに現われ、自由水面領域では消滅する。この傾向はスペクトル分布でも明瞭に認められ、一般的な特性であると考えられる。

以上の結果を総合して現象論的にいえば次の結論が得られよう。すなわち、吹出しを与えると壁面近傍の小さな渦が浮上されて非一様化に向かい、諸々の乱流特性の分布は急な勾配をもつようになって乱れは促進される。一方、吸込みを与えると壁面上方の大きな渦が吸い寄せられて一様化に向い、次第にせん断乱流の特性を失って乱れは抑制される。

以上の研究は滑面浸透床を対象としたが、粗面浸透床上の乱流構造に及ぼす流入の影響に関しては別の機会に発表したい^{25), 26)}。これらの乱流構造に関する詳細な検討は点計測法及び可視化法を駆使して今後精力的になされなければならないが、流れに吹出しを与えると乱れが促進され、吸込みを与えると抑制されるという当初の予測を十分確認することができた。すなわち、乱れの制御法を確立しようとする今後の研究課題に貴重な示唆を与えたものとする。

第9章 参考文献

- 1) Rubesin, M. W. : An analytical estimation of the effect of transpiration cooling on the heat-transfer and skin-friction characteristic of a compressible turbulent boundary layer, NACA, TN-3341, 1954.
- 2) Dorrance, W. H. & Dore, F. J. : The effect of mass transfer on the compressible turbulent boundary layer skin friction and heat transfer, J.A.S., vol.21, pp.404-410, 1954.
- 3) Clarke, J. H., Menkes, H. R. & Libby, P. A. : A provisional analysis of turbulent boundary layers with injection, J.A.S., vol.22, pp.255-260, 1955.
- 4) Black, T. J. & Sarnecki, A. J. : The turbulent boundary layer with suction or injection, A.R.C., R & M., No.3387, 1958.

- 5) Stevenson, T. N. : Turbulent boundary layers with transpiration, AIAA J., vol.2, pp.1500-1502, 1964.
- 6) Tennekes, H. : Similarity laws for turbulent boundary layers with suction or injection, J. Fluid Mech., vol.21, pp.689-703, 1965.
- 7) Simpson, R. L., Moffat, R. J. & Kays, W. M. : The turbulent boundary layer on a porous plate: experimental skin friction with variable injection and suction, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.12, pp.771-789, 1969.
- 8) Julien, H. L., Kays, W. M. & Moffat, R. J. : Experimental hydrodynamics of the accelerated turbulent boundary layer with and without mass injection, ASME, J. Heat Transfer, pp.373-379, 1971.
- 9) Andersen, P. S., Kays, W. M. & Moffat, R. J. : Experimental results for the transpired turbulent boundary in an adverse pressure gradient, J. Fluid Mech., vol.69, pp.353-375, 1975.
- 10) Oldenzel, D. M. & Brink, W. E. : Influence of suction and blowing on entrainment of sand particles, Proc. of ASCE, HY-7, pp.935-949, 1974.
- 11) 中川博次, 禰津家久, 為沢長雄: 透水性粗面上の開水路乱流の特性について, 土木学会関西支部年講, Ⅱ-8, 1975.
- 12) Tennekes, H. & Lumley, J. L. : A first course in turbulence, MIT Press, 1972.
- 13) 中川, 禰津, 為沢, 大仁: 壁面を通しての流出入に伴う開水路乱流の特性, 土木学会関西支部年講, Ⅱ-30, 1976.
- 14) 為沢長雄, 中川博次, 禰津家久: 開水路乱流場に及ぼす浸透流の影響について, 第31回土木学会年講, Ⅱ-223, 1976.
- 15) Rotta, J. C. : Turbulente Strömungen, Teubner, 1972, (大路通雄(訳) : 乱流, 岩波書店, pp. 210-238, 1975).
- 16) Torii, K., Nishiwaki, N. & Hirata, M. : Heat transfer and skin friction in turbulent boundary layer with mass injection, Proc. of 3-rd Int. Heat Transfer Conf., pp.34-48, 1965.
- 17) Kinney, R. B. : Skin-friction drag of a constant-property turbulent boundary layer with uniform injection, AIAA J., vol.5, pp.624-630, 1967.
- 18) Mickley, H. S., Smith, K. A. & Fraser, M. D. : Velocity defect laws for transpired turbulent boundary layers, AIAA J., vol.3, pp.787-788, 1965.
- 19) Dutton, R. A. : The effects of distributed suction on the development of turbulent boundary layers, A.R.C., R & M., No.3155, 1958.
- 20) Patel, V. C. & Head, M. R. : Reversion of turbulent to laminar flow, J. Fluid Mech., vol.34, pp.371-392, 1968.
- 21) Blackwelder, R. F. & Kovasznay, L. S. G. : Large-scale motion of a turbulent boundary layer during relaminarization, J. Fluid Mech., vol.53, pp.61-83, 1972.
- 22) Lubard, S. C. & Fernandez, F. L. : The turbulent boundary layer with mass transfer and pressure gradient, ASME, J. Applied Mech., pp.688-698, 1971.
- 23) 為沢長雄: 浸透層上の開水路流れの乱れ特性に関する基礎的研究, 京都大学修士論文, 1976.
- 24) 中川博次, 禰津家久, 松本直也: suction 及び injection を伴う開水路乱流の挙動, 土木学会関西支部年講, Ⅱ-37, 1977.
- 25) 中川博次, 禰津家久, 藤原吉美: 開水路粗面浸透層上の乱流構造について, 土木学会関西支部年講, Ⅱ-36, 1977.
- 26) 松本直也, 禰津家久, 中川博次: 吸込みや吹出しを伴う開水路粗面乱流の特性, 第32回土木学会年講, Ⅱ-152, 1977.

結 論

本論文は、乱流抵抗則、物質拡散、土砂輸送、各種の水理構造物周辺の流れなど広範な工学的諸問題の解決に当たっての基本的な課題である乱流構造の解明という立場から、特に水理学・水工学において重要な開水路乱流をとりあげ、その内部構造に関して系統的な基礎研究を行ったものであって、以下に、得られた主な成果を相互に関連づけて要約し、さらに今後の研究発展の方向を論述して結論とする。

第1編は不浸透床上的開水路乱流を対象とした基礎的研究であるが、まず、第1章でその概説を行った後、第2章では開水路乱流の内部構造を理論的に予測し、その解析手法を明示した。すなわち、乱れエネルギーの収支関係から乱流構造を理論的に考察し、スペクトル構造との類似性に着目してその空間構造を壁面領域、平衡領域及び自由水面領域に区分し、各領域での乱れの普遍特性を予測した。スペクトル空間の各小領域に適用される指数乗則を統一した形で分布形を数値解析上から提示して、渦スケール間の関連を明示すると共に、「給水管モデル」を提案し、乱れ逸散率の評価法を検討した。このような「長時間平均から見た乱流構造」に関する理論結果の妥当性は第4章での実験的考察によって実証された。次に、2変数 Gram-Charlier 型確率分布からキュムラント展開手法を用いて瞬間 Reynolds 応力の構造を予測する理論を確立し、第5章で扱う「短時間平均から見た乱流構造」すなわち乱れ発生機構の解明に有力な手掛りを得た。

第3章は、第4章以下の実験的研究を遂行するに必要な乱れ計測技術及びデータ解析手法を確立したものである。すなわち、点計測法として用いた2成分熱膜流速計及び乱れの可視化法として用いた水素気泡トレーサ法の諸特性やこれらに及ぼす種々の影響因子を検討し、精度高い解析データが得られるようにした。

以上のように、開水路流の乱流構造に関する理論予測、解析方法及び乱れ計測技術を確立したのちに、実験的研究を行った。

まず、第4章は開水路流の乱れ特性量及び乱れエネルギー収束に関する実験的研究で、「長時間平均から見た乱流構造」を明らかにしようとしたものである。これは、境界層流や管路流の気流実験ではほぼ解明されたいわば「古典的研究」であるが、開水路流では不明な点が多く、前者との比較検討の観点から Reynolds 数、Froude 数及び壁面粗度を系統的に変化させた実験を行い、乱流構造に及ぼすこれら水理要素の影響を詳細に検討し、開水路流に特有な自由水面や壁面粗度の存在による影響を明らかにした。乱れの self-consistency に立脚して、乱れ3成分の強度、

Reynolds 応力、乱れ発生率、逸散率、拡散率あるいはスペクトル分布特性、特性渦スケール等の乱れ特性値を考察し、乱れエネルギーの収支関係を明らかにして第2章での理論展開の妥当性を検証すると共に、乱流場全域で成立する普遍関数を新たに提案した。多くの面で空気乱流と類似した特性が示され、乱流構造は self-consistent な相似特性を強くもつものと考えられるが、次のような開水路流に特有な現象も認められ、極めて注目される。

(i) 限界流付近では、inactive な渦運動と考えられる水面変動の影響で乱れ特性値は普遍的特性を失うが、それ以外では active 成分の働きが強く、Reynolds 数や Froude 数によらずに普遍特性分布を示す。

(ii) 粗度の影響はほぼ平衡領域の中央部までに現われ、滑面乱流に比べて攪乱渦が崩壊され易いために乱れエネルギーの再配分が進み、等方位指向がより強いことを示す。このことは、スペクトル特性からも裏付けられた。

以上の結果を要約すると、「長時間平均から見た乱流構造」すなわち乱れエネルギーの収支構造は、概ね発生率と逸散率とが釣り合っているが、詳細に言えば buffer 層で乱れエネルギーが過剰となり、その一部は運動エネルギーの拡散によって自由水面領域での不足分を、また残りは圧力エネルギーの拡散によって粘性底層での不足分をそれぞれ賄うが、粗面乱流になると buffer 層が消滅するから、粗度によって乱れの発生機構は何らかの影響を受けるものと考えられ、これに関する研究は次の第5章で遂行された。

第5章は開水路乱流での瞬間 Reynolds 応力の構造とその乱れ発生機構を取扱ったもので、「短時間平均から見た乱流構造」すなわち bursting 現象を解明しようとしたものである。この課題は空気乱流に関しても「最新の研究」であるから、相互の関連を考慮しつつ検討を進めた。まず、瞬間 Reynolds 応力を実測し、条件付サンプリング手法を用いて bursting 現象の各事象が果たす寄与率や占有時間率等を解析し、第2章の理論予測値との良好な一致が得られることを確かめた。乱れの大部分は ejection と sweep 運動とによってパルス状に発生させられ、粘性底層端以上で ejection の方が、底層内で sweep の方がそれぞれ大きくなることが示された。さらに、これら一連の bursting 現象は乱れ拡散率を介して乱れエネルギーの収支構造と密接な関係をもつこと、また粗面乱流になると sweep 運動が強くなり、乱れ発生機構が影響を受けることなど注目すべき知見が得られ、これらの結果は第4章での乱れエネルギーの収支構造をより明確にした。次いで、bursting 現象の周期特性を瞬間 Reynolds 応力の発生挙動から明らかにすると共に、発生渦の coherent な運動特性を考察した。その結果、

乱流は壁面領域を支配する内部パラメータと自由水面領域を支配する外部パラメータとが同時に作用し合う「二面構造性」をもつことが示され、bursting現象とboiling現象との関連性など今後の研究発展への足掛かりを得た。さらに、以上の条件付点計測資料を補完し、またより広い現象把握を得るために、水素気泡法によるbursting現象の可視化観測を行い、低速・高速稿の特性やejection及びsweep運動の特性を明らかにした。

次に、第6章は以上の研究成果に基づいて適切な乱流モデルを考案し、これらの乱流特性を合理的に説明しようとした研究であり、いわば第1編の総決算ともいえるべきものである。平衡領域以上では第4章で明らかにされた乱れエネルギーの平衡状態に着目して「 ω -型渦モデル」を、壁面領域では第5章で明らかにされたbursting現象の周期特性に着目して「更新モデル」をそれぞれ提案し、また両モデルの結果を接続・統合させるために、粘性底層と境界層の両外縁の類似性に着目した「結合モデル」を考案した。これらのモデルによって乱流現象が定量的にもかなり適確に説明されたが、特にbursting現象の複雑な変遷過程が比較的単純な更新モデルによって説明できたことはこの分野の研究の発展に大いに資するものと考えられる。

第2編は、以上の第1編で得られた不浸透床上の乱流構造に関する知見を土台として、さらに浸透床上の乱流構造を明らかにしようとした研究であり、まず第7章でその概説が行われた。

第8章は、粗面乱流より河床がさらにルーズとなった透水性河床面の近傍で生じる主流と浸透流との相互作用を論じたものである。第4章の結果から、主流が圧力変動の形で河床面下の浸透流へまづ攪乱を与え、次にこのフィード・バックとして浸透流が主流に何らかの付加応力を発生させ、粗面乱流より大きなせん断応力が生じるものと考えた。浸透流の攪乱特性を考察した後、風波の発生理論を拡張したPhillipsの理論を適用して、この付加応力の予測式を導いた。そして、せん断応力を実測して両者を比較検討した結果、浸透層上の主流と浸透流との動的な相互作用機構が上述の物理モデルによって説明できることを確かめた。

最後の第9章は、河床面を通して水流の吹出し及び吸込みが存在する場合の乱流構造を理論的・実験的に解明しようとした基礎的研究である。開水路乱流に関するこの種の研究が従来ほとんどない現状に鑑み、まず平均流特性に及ぼす流出入の影響を詳細に検討し、不浸透床上で確立された対数則分布等を修正・拡張して適用しても実用上十分であることを示した。次に、乱れ特性に及ぼす影響を検討した結果、次の事実が明らかになった。すなわち、壁面からの吹出しによって壁面近傍の小さな攪乱渦が浮上して非一様化に向かい、種々の乱流特性の分布は急激な変化をもち、乱れが促進され、極端な場合は剝離現象が起こる。一方、

壁面から吹込みを与えると、壁面上方の大きな攪乱渦が吸い寄せられて一様化に向かい、次第にせん断乱流の特性が失われて乱れが抑制され、極端な場合には再層流化現象が起こることが判明した。このような壁面からの流入入による乱れの変化特性は、「乱流現象の制御法」を開発する上で極めて有用な知見を与えるものと考えられる。

以上の第1編及び第2編の研究成果から、当初設定された各研究課題に対してそれぞれ満足すべき結論が得られ、十分に発達した開水路流の乱流構造が相当明らかにされた。これらの研究全般を通して示唆された最も基本的かつ普遍的な乱流特性を挙げれば、次のとおりである。

① 開水路流の乱流構造は、一般にactive成分が強く、境界条件が多少変化してもこの影響は比較的狭い領域にしか現われず、乱れのself-consistencyすなわち相似性が良好に成立することが予測される。

② 粘性底層端を境として乱流構造は顕著に変化するが、この事実がbursting現象を解明する鍵を与えるものと期待される。

③ 乱流構造は本来二面構造性をもち、内部及び外部パラメータの相互作用がより重要となり、攪乱渦の発生・崩壊機構と何らかの関連性をもつものと予測される。

このような示唆の妥当性をより広い観点から検証すると共に、乱流場の二面構造性の物理機構、bursting及びboiling現象との関連性、さらに壁面からの流入入に伴うbursting現象の変化とその制御などを考察することによって、開水路流の乱流構造をより基本的に明らかにすることができると考えられる。また、本研究で得られた研究成果をより発展させるために、実河川等の水域で問題とされる乱流抵抗則、物質拡散、土砂輸送、各種の水理構造物周辺の流れ等の解明やそれらの現象の制御法の開発などの応用的研究を進める必要があり、今後系統的な一貫性のある研究を精力的に続けて行きたい。

開水路流を含め乱流現象の研究は正しく古くて新しい重要なかつ難解な分野であり、系統立った着実な研究が望まれる。開水路流の乱流構造を解明しようとする遠大な研究課題に対して、本研究で得られた知見はごく基礎的ないわばその糸口とでもいえるべきものであり、またここで提示された理論展開や乱れ計測技術には今後検討を要する点も残されているが、本研究の成果は単に水理学や関連分野での乱流現象の基礎的解明に寄与するのみならず、実際の水工学上の諸問題を解決する上でも少なからず貢献するものと確信する。

最後に、本研究を遂行するのに終始懇切な御指導を願い、本論文の作成に適切な御教示を賜った京都大学工学部中川博次教授に衷心から謝意を表すと共に、本論文について適

切な御助言をいただいた京都大学工学部岩佐義朗教授及び京都大学防災研究所今本博健教授に深く感謝する次第である。また、本実験に御協力願った当時の大学院生 上田寛

君（現在、運輸省勤務）及び為沢長雄君（現在、水資源公団勤務）はじめ水理学研究室の諸氏ならびに論文作成に協力を仰いだ家族一同に謝意を表明する。

追補・訂正

ページ67，右欄の23行以下での $(\hat{t}_e - \hat{t}_{in})$ の定義があいまいであるから，次のように追補・訂正する。

十分に長い計測時間 T 内でレベル H のとき観測されるejection事象の発生個数を N_e ，interaction事象の発生個数を N_{in} とすれば，

$$(\hat{t}_e - \hat{t}_{in}) \equiv \frac{T}{(N_e - N_{in})}$$

と定義されている。本文中の $(\hat{t}_e - \hat{t}_{in})$ はこの定義でsymbolicalに使われており，周期同志の差を意味していない。すなわち，ejection的運動の発生個数からinteraction運動の発生個数を差し引いて，ejection運動のみの発生個数が検出され则认为ている。sweep運動に関しても同様である。

